



La question de l'unicité de l'équilibre général chez Gérard Debreu

Mathias Soyeux

► To cite this version:

Mathias Soyeux. La question de l'unicité de l'équilibre général chez Gérard Debreu. Economies et finances. 2014. dumas-01120255

HAL Id: dumas-01120255

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01120255>

Submitted on 25 Feb 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris
UFR 02 Sciences Economiques

Master THEME (Théorie, Histoire et Méthodes de l'Economie)
Spécialité « Economie et Sciences humaines : Epistémologie, Méthodes et
Théories »

**LA QUESTION DE L'UNICITE DE L'EQUILBRE
GENERAL CHEZ GERARD DEBREU**

Présenté et soutenu par :
Mathias Soyeux
Juin 2014

Directeur de recherche :
Jean-Sébastien Lenfant

L'université de Paris 1 Panthéon Sorbonne n'entend donner aucune approbation, ni désapprobation aux opinions émises dans ce mémoire ; elles doivent être considérées comme propre à leur auteur.

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE	7
Le coeur immuable de la TEG	7
L'axiomatisation de l'économie	15
Plan	19
 I Histoire de l'Unicité de Wald à Debreu	 21
1 Wald, l'économiste de la fracture et de la continuité	23
1.1 L'environnement intellectuel et économique des années 1930	24
1.2 Le modèle de Wald	26
1.3 Des limites du modèle de Wald à la mise entre parenthèse du pro- gramme scientifique de l'économie mathématique	36
2 Debreu ou l'ultime preuve théorique	40
2.1 L'intérêt tardif de Debreu pour l'unicité	41
2.2 La preuve de l'unicité ou le tour de force de Gérard Debreu	43
2.3 Prolongements et limites	49
 II L'applicabilité de l'unicité de l'équilibre général	 54
3 Le singulier statut de l'unicité	56
3.1 La place de l'unicité dans les modèles appliqués d'Equilibre Général	56
3.2 Un nouveau statut pour l'unicité...	61

3.3	...pour des résultats intéressants mais peu nombreux.	68
4	Kehoe : de la révolution à l'ambiguïté	74
4.1	Economiste et mathématicien ou mathématicien-économiste?	74
4.2	Un disciple dissimulé de Debreu	78
4.3	Quid de l'unicité et de la TEG?	81
	Conclusion	84
	Bibliographie	91

INTRODUCTION GENERALE

Depuis la parution de l'ouvrage de B. Ingrao et G. Israel, *The invisible Hand* en 1987 — assurant un exposé complet ainsi qu'une fine vulgarisation de la théorie de l'équilibre générale (TEG)—nul n'est censé ignorer la présentation originale de la TEG, qui semble être acceptée par la profession comme telle depuis lors, sous forme de triptyque. La particularité ne provient pas tellement du fait que le programme de recherche scientifique (PRS) associé se décompose en trois parties mais plutôt que ces trois parties puissent être traitées indépendamment les unes des autres. Il est à noter que cela n'empêche en rien une analyse jointe de deux d'entre elles par exemple. Ce fut le cas pendant les années 1930 avec les mathématiciens économistes germanophones tel que Wald, qui traita à la fois la question de l'existence et de l'unicité dans trois articles que nous présenterons plus tard. Le triptyque est donc constitué par l'Existence, la Stabilité et l'Unicité. Procédons dès à présent à la présentation de ces trois questionnements.

Le coeur immuable de la TEG

Dans cette section, nous nous appuyons essentiellement sur les trois derniers chapitres de l'ouvrage de B. Ingrao et G. Israel [1987]. Notre ambition n'est pas de faire une analyse complète et critique du triptyque. Tout d'abord parce que de nombreux auteurs l'ont déjà très bien fait auparavant, puis parce que notre initiative ne se situe pas à cet endroit. Nous allons récapituler la situation pour satisfaire une visée vulgarisatrice et pédagogique pour ensuite s'attacher à explorer plus en profondeur la question de l'unicité tout au long du mémoire.

L'Existence

La question de l'existence est la première des trois véritablement traitée par les mathématiciens-économistes ; elle ne requiert pas d'hypothèses économiques absolument. D'aucuns veulent conserver un lien entre les mathématiques et le monde économique réel, par soucis de rigueur, alors que d'autres préfèrent étudier la problématique de manière purement mathématique, ce qui en soi n'est pas incongru. Son traitement hâtif ne relève pas pour autant d'un concours de circonstances

mais surtout d'un ordre de priorité. De par la facilité relative de son traitement — essentiellement mathématique — l'existence devient le problème à résoudre avant tout autre. Spécifions qu'avant l'arrivée des mathématiciens-économistes, la démonstration de l'existence n'était nullement nécessaire. L'idée même de l'existence apparaissait comme évidente¹. Cependant, avec ce changement de statut, même si cette vision n'est pas partagée par l'ensemble des économistes, elle devient centrale à partir des années 1950. Les articles de von Neumann [1937] et de Wald [1936a, 1936b, 1936c] sont, sans équivoque, incontournables. Ils font partie des principales contributions pour le développement de l'existence de l'équilibre général (EG).

Si, comme nous venons de le souligner, l'article de von Neumann de 1937, développant un modèle d'équilibre général dynamique, est jugé comme révolutionnaire — dans différents domaines tels que la croissance ou simplement l'EG — et central pour la suite, d'autres sont aussi très importants. Parmi eux figure le travail effectué par von Neumann et Morgenstern publié en 1944². Avec cet ouvrage ils ont perturbé et transformé la manière d'aborder le problème de l'existence en plusieurs points. L'un des plus marquants, bien que peu novateur puisqu'il est déjà détaillé dans deux articles de von Neumann qui sont parus en 1928³ et 1937, est le recours à l'axiomatisation du concept de jeu, comme nous l'entendons dans la Théorie des Jeux. L'aspect rigoureux, *logique*, l'effort de systématisation supplémentaire dont le processus d'optimisation de la théorie économique est l'objet, est remarquable en ce sens qu'ils permettent à l'économie mathématique de ne plus être sous le joug traditionnel que représentait le calcul différentiel.

Un autre point important est l'introduction du concept d'utilité dans la TEG. Les auteurs ont essayé de lui donner une valeur numérique, ainsi qu'une représentation graphique par l'intermédiaire de fonctions mathématiques continues réelles conservant l'ordre établi des préférences. Une avancée notable, interpellant et inspirant d'autres économistes notables et influents, comme Debreu qui s'inscrit dans la

1. L'idée paraissait évidente aussi pour quelques mathématiciens-économistes tel que Hicks.

2. *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton (2nd ed. 1947).

3. J. von Neumann, « Zur Theorie der Gesellschaftsspiele » *Mathematische Annalen*, 100, 1928, pp. 295–320. Cet article, peu connu, instaure pourtant les fondations de la théorie de l'utilité.

continuité de ce projet. Le mathématicien américain J. Nash, quant à lui, contribue à étendre la domination de l'axiomatique en généralisant la théorie de l'équilibre proposée par von Neumann et Morgenstern dans le cas d'un jeu à n agents. Pour ce faire, il utilise l'extension du théorème du point fixe de Kakutani (formulé par Brouwer en premier lieu). Le point d'orgue de l'existence chez les mathématiciens-économistes est atteint à deux reprises : lors de la publication de l'article d'Arrow et Debreu en 1954⁴, puis avec *Theory of Value*⁵ de G. Debreu publié en 1959. Nombres de preuves de l'existence ont été publiées, introduisant des effets externes par exemple (voir les travaux de Mas Colell à ce propos), complexifiant ainsi le projet. Nous ne les présenterons pas. Nous n'allons pas reconsidérer non plus le regain de vitalité qu'a connu les *mathématiques du temps* — le calcul différentiel — à partir des années 1970, notamment avec les travaux du mathématicien américain, S. Smale, chef de file de ce mouvement, prouvant à son tour l'existence de l'EG.

En somme, la question de l'existence ainsi traitée jette les bases d'une nouvelle manière d'opérer en économie. Ce problème souvent peu voire pas étudié par les économistes avant l'arrivée des mathématiciens dans les années 1930, devient celui à résoudre avant toute chose. La logique est la suivante : s'il n'existe pas d'équilibre général dans une économie, pourquoi s'échiner à prouver sa stabilité ou son unicité. En revanche, les conditions assurant l'existence ne sont que très inégalement dotées d'une interprétation économique. Si Wald s'attache à joindre les mathématiques et l'intuition économique, von Neumann quant à lui semble davantage s'attarder sur la rigueur interne de son développement plutôt que sur le sens économique que peut générer son système d'inéquations. De ce point de vue, les deux autres questionnements du triptyque sont déterminés par la réponse avancée pour l'existence. Notons que tous les mathématiciens-économistes ne partagent pas cette vision. Samuelson stipule que la stabilité est la question fondamentale pour des raisons que nous allons expliciter dans notre prochaine section. De plus, selon lui, une fois cette dernière prouvée, l'existence l'est de fait aussi. Il fait d'une

4. *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy*, Econometrica vol.22, p.265–290.

5. *Theory of Value. An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, Cowles Foundation Monograph n°17, Yale University Press, New Haven.

pierre deux coups. Abordons désormais la question de la stabilité.

La Stabilité

La stabilité a la particularité d'être considérée tardivement par rapport à l'existence. Sa première mise en équation mathématique ne date que des années 1940. Ce que nous nommons ici mise en équation n'est que la transposition du problème en langage mathématique. Les premiers théorèmes, quant à eux, n'apparaissent qu'à la fin des années 1960. Hicks est l'un des tous premiers économistes à aborder ce problème. Il se concentre essentiellement sur la preuve de la stabilité locale. Son analyse reste toutefois incomplète puisqu'il oublie d'étudier la situation *dynamiquement*. Le cadre employé est celui de la statique comparative et non de la dynamique comparative — même s'il introduit dans la seconde partie de *Valeur et Capital* une dynamique temporaire, ce qui n'est pas suffisant et laissant comme lacunaire, inachevée son étude de la stabilité. Par exemple il ne prend pas en compte le changement dans les quantités du facteur capital, dans les ressources, dans les prix ; en somme il n'étudie pas les effets provenant des modifications des ressources ou des utilités sur le système économique et sa stabilité. Hicks met en place des outils ayant, avant tout, une fonction heuristique. Samuelson salue le travail fait par Hicks. Il essaye de le prolonger en l'améliorant. Pour ce faire il conserve ses intuitions économiques, tout en lui administrant la dimension dynamique désirée. Samuelson et Lange sont des précurseurs dans le traitement dynamique du problème du tâtonnement. Le premier est d'ailleurs celui qui formule mathématiquement le problème de manière claire. Nous retenons aussi ces deux noms puisqu'ils sont les premiers à émettre l'idée de la séparation entre le normatif et le descriptif. La stabilité est intéressante car elle détient la particularité d'engendrer deux contenus différents, depuis que le projet Walrasien existe, en référence à son tâtonnement :

- un contenu descriptif, ayant pour but d'assurer une approche objective.
- un contenu normatif revêtant un caractère davantage utopique.

Or deux sens différents donnés impliquent deux interprétations différentes.

Le point de vue descriptif est emprunté par une école de pensée qui affirme que

la TEG est le point d'orgue d'un processus intellectuel économique, ayant pour but de dépeindre et de comprendre au mieux, i.e. dans sa globalité, les processus sociaux, les systèmes sociaux qui gravitent autour du concept de la Main invisible⁶. Cette position traduit un aspect idéologique fort, celui stipulant que le marché détient une qualité intrinsèque qui est d'avoir la « propriété de combiner les comportements subjectifs harmonieusement » en ne connaissant que l'existence d'un état final. Dès lors, l'ambition est juste de démontrer que l'économie est capable de converger vers cet état et de l'atteindre de manière autonome, spontanée, i.e. avec les variations de prix et les ajustements de variables du système, pour arriver, par exemple, aux prix d'équilibre. Le rôle de l'économiste qui en résulte est explicite ; il doit se contenter de « décrire ces lois d'auto-régulation, i.e., découvrir leur forme et démontrer leur validité ».

Cependant l'échec de la démonstration réside dans le fait qu'il y a une contradiction. La stabilité n'est prouvée que lorsque l'on impose directement un système de prix, de manière quelque peu arbitraire. Il ne provient plus du libre jeu d'ajustement de l'offre et de la demande. On fait donc appel, en un certain sens, à une économie centralement planifiée.

D'aucuns pensent que cela est impossible en raison de la vision utilisée, d'autres s'accrochent aux preuves théoriques du triptyque et croient aux vertus du marché libre.

Arrive, ensuite, la démarche normative, foncièrement inspirée par Walras⁷. Lange est l'un des principaux acteurs qui insistent sur son importance. Il le fait d'une manière précise, s'appuyant sur une dimension technique, théorétique et pratique. Il préconise fortement une économie planifiée, socialiste et appelle à sa

6. « Cela représente une force inhérente au marché et qui dirige inévitablement l'économie vers un état dans lequel les opérations des différents agents deviennent compatibles, même si l'état final peut ne pas coïncider avec l'objectif souhaité par l'un deux.[...] L'idée est que le noyau de cette force (ou 'main invisible') est la loi de l'offre et de la demande qui montrent clairement l'influence persistante de l'analogie Walrasienne entre cette loi et la loi de Newtonienne (décrivant le travail de l'attraction universelle, i.e., la 'Main invisible' régulant le mouvement des corps célestes) ». p 330-331, *The invisible hand*, traduit par nos soins.

7. « M. Pareto croit que le but de la science est de se rapprocher de plus en plus de la réalité par des approximations successives ; et moi je crois que le but principal de la science est de rapprocher la réalité d'un certain idéal. C'est pourquoi je formule cet idéal ».

réalisation. Il se distingue de ses prédécesseurs en ce sens qu'il veut dépasser les apories que rencontrent les économies socialistes de l'époque par l'utilisation du tâtonnement walrasien et de ses processus d'ajustements par les quantités de biens produites⁸. Ainsi ces processus reposent sur le fait que les prix peuvent être utilisés « comme des 'signaux décentralisés capables de mettre à jour des décisions de production correctes' »(p.332). Or pour obtenir ce tâtonnement souhaité et imaginé par Lange, il n'y a pas d'autres solutions que de le construire réellement pour le faire converger véritablement vers l'état désiré. Cette démarche intellectuelle ne peut être qualifiée autrement que normative. Aussi, il s'attèle à configurer un algorithme grâce aux ordinateurs et à le tester. Cette nouvelle méthode permet de délier des problèmes économiques qui ont été omis volontairement, exclus par les macro-économistes (et micro-économistes) de l'époque. Le fait de ne pas croire en les vertus salvatrices du libre marché amènent les économistes, pour certains socialistes tels que Lange ou plus tard Scarf (à ne pas recenser dans les économistes socialistes), à reconsidérer les problèmes comme ceux liés aux allocations des ressources dans l'économie ; comment doivent-elles s'opérer ? doivent-elles être prises en charge par l'Etat ou doit-on laisser le libre marché s'organisé sans intervention ? En découle le problème de la justice sociale et la distribution optimale des ressources.

Ces deux démarches que l'on peut penser aujourd'hui comme quasi-parfaitement opposées, ne le sont pas à l'époque. Leur destin est encore entremêlé ; quelques-uns perçoivent certaines limites au laisser faire du libre marché, notamment avec la crise de 1929. Ces économistes proviennent des deux bords. Le temps n'est pas encore à la scission mais à la persuasion. Depuis les années 1970, ce temps semble révolu, et la séparation est consumée. Les recherches se concentrent exclusivement d'un côté, sur les bienfaits de la « main invisible » et exclusivement de l'autre, sur le calcul même de l'équilibre.

Comme pour l'existence, nous n'allons pas faire un résumé des débats qui ont agité et agitent encore la question de la stabilité, ses évolutions ; d'une part parce que nos propos futurs nous amèneront à rebondir sur la question de la stabilité, d'autre

8. Les auteurs parlent de « tâtonnement en termes de quantité ».

part parce qu'il nous semble davantage pertinent de présenter la dichotomie existante en amont des recherches plutôt que le contenu des recherches mêmes. Ce clivage sera essentiel dans l'analyse empirique de l'unicité.

Précisons juste que les années 1970 représentent une période charnière pour la question de la stabilité, ainsi que pour le noyau de la TEG. Comme nous l'avons vu un premier schisme a eu lieu. Puis un second, incontestablement lié au premier⁹, entame le programme de recherche scientifique. Face à l'effritement que connaît depuis plusieurs décennies le problème de la stabilité — l'article de Sonnenschein-Mantel-Debreu conduit l'ultime offensive, celle de trop pour les défenseurs du programme — deux voies s'ouvrent. La première persiste dans la perspective offerte par le PRS et les économistes qui s'y engouffrent ne s'offusquent pas de l'aspect arbitraire que peuvent revêtir leurs recherches. L'essentiel étant de lever l'impossibilité, de continuer dans la voie anciennement tracée, découverte par Sonnenschein-Mantel-Debreu, pour améliorer et perpétuer le PRS. La seconde voie, quant à elle, propose une alternative. Le PRS arrive à épuisement quant à sa quête de généralité. La seule manière désormais de faire de l'équilibre général passe par l'introduction d'hypothèses socio-économiques ou alors de se détourner définitivement de la question de la stabilité et de se concentrer sur l'atteinte de l'équilibre à un instant donné. Il s'agit, en somme, de traiter de la calculabilité de l'équilibre comme pouvait le préconiser Scarf. Cette nouvelle option proposée est très importante et elle sera de nouveau présente lors de notre étude de l'unicité.

L'unicité

L'unicité de l'EG est souvent la partie la moins étudiée, la moins connue par les experts comme par les profanes. Sa spécificité en a fait une question annexe, que l'on peut, dans un premier temps, difficilement appréhender de façon indépendante des deux autres. Son traitement à part entière ne s'est opéré que dans les années 1970 véritablement. Avant, lorsqu'elle était explorée, cela s'effectuait de manière jumelée à des recherches portant sur la stabilité ou l'existence. Dans ses travaux de recherches durant les années 1930, Wald fit d'une pierre deux coups, i.e. démontrer

9. L'ordre ici présenté est arbitraire, il ne correspond en rien à un ordre historique ou autre.

l'existence, ainsi que l'unicité de l'EG. A l'inverse, elle a pu ne pas figurer dans les recherches faites sur la stabilité ou l'existence. Debreu et Arrow dans leur article de 1954, ne s'occupèrent que de prouver l'existence. Aussi, si les deux premières ont pu être bénéfiques au traitement de l'unicité, l'implication inverse, qui dessinerait une équivalence, n'est pas vraie. Le premier problème que l'on se pose dès lors est, y-a-t'il un intérêt à savoir si un équilibre est unique indépendamment du reste ? Plusieurs angles d'attaque sont possibles. L'un des plus usités est celui traitant de son aspect global ou local. De nos jours, l'unicité locale reste plus adéquate, même si selon les caractéristiques des hypothèses retenues — i.e. nécessaires ou alors suffisantes — le statut de l'unicité de l'équilibre se confirme ou s'effondre. De surcroît, sa confirmation ne se fait pas sans coûts. Nous reviendrons sur cet aspect central dans notre développement.

Un autre angle, plus technique, nous invite à nous pencher sur le système d'équations de l'EG. L'utilisation d'inégalités plutôt que d'égalités perturbe (en raison de paramètres aléatoires, de résidus insérés) mais ne permet en rien « d'exclure la possibilité d'une pluralité d'équilibre correspondant à un même ensemble de paramètres. Un tel résultat remettrait en cause l'idée traditionnelle selon laquelle l'état des marchés (prix et quantités d'équilibre) est strictement *déterminé* par des caractéristiques exogènes de l'économie¹⁰ » (p.346-347). Cela signifie que si pour un même ensemble de paramètre on se trouve en présence de plusieurs équilibres possibles alors la sélection d'un équilibre plutôt qu'un autre ne relève pas du pouvoir du marché en lui même, i.e. d'une décision endogène indépendante de la sphère sociale, mais d'une intervention exogène, extérieure au marché, des dirigeants et responsables politiques. Nous devons donc faire face à un problème de statut de l'économie qui ne va pas de soi. Admettre que le choix d'un équilibre ne provient pas du libre-jeu du marché mais d'un agent tiers provoque une reconsidération de la décentralisation de l'économie ou de sa planification. Nous n'évoquerons pas en profondeur le rôle, l'identité et la place du décisionnaire. La dimension politique ne sera traitée que brièvement via la statique comparative et la dimension applicable de l'unicité.

10. *Histoire de la pensée économique*, Ghislain Deleplace, Dunod.

Se pose enfin l'énigme du critère permettant la sélection d'un équilibre plutôt qu'un autre. Le critère parétien n'aide en rien. Il permet de déterminer l'ensemble réunissant les optima de Pareto mais pas de procéder à une classification à l'intérieur même de l'ensemble. Le critère s'établit de nouveau de façon exogène. On décèle par conséquent une grande complexité dans l'appréhension de l'unicité. Si l'on se situe dans un cadre à la Debreu, cette complexité ne nous mène pas à une impasse sinon à une question de plus grande importance évoquant l'évolution du PRS mis en place pour la TEG, son statut et son avenir au sein de la science économique. Le problème de l'arbitraire dans les décisions à prendre ne fera pas l'objet de notre développement à venir. En revanche la question du devenir du PRS affilié à la TEG, de l'unicité seront des problèmes auxquels nous tenterons d'apporter des éléments de réponses.

Seulement, avant d'aborder l'avenir de l'unicité, il est indispensable de préciser et de connaître le contexte grâce auquel cette question singulière, et plus généralement les trois questionnements liés au triptyque, ont vu le jour. Car, s'il apparaît comme commun de présenter le PRS de la TEG sous cette forme, cela n'a pourtant pas toujours été le cas. Comme nous avons pu l'entrevoir à certains moments, les différences entre les mathématiques employées ont joué un rôle essentiel dans l'avènement de cette vision indépendante des trois piliers. Plus que la querelle des mathématiques — le calcul différentiel contre la topologie algébrique — c'est la méthode axiomatique qui est à l'origine de ce changement radical et sans précédent. Le mathématicien hongrois von Neumann fut l'un des premiers à l'utiliser pour résoudre le problème de l'existence et ainsi révolutionner l'économie. Intéressons nous dès à présent à l'axiomatisation de l'économie.

L'axiomatisation de l'économie

Dater l'apparition de l'axiomatique n'est pas chose aisée. Mongin (2003) distingue deux axiomatiques, celles des anciens et celles des modernes, indiquant que l'on peut évoquer sa présence déjà au temps de la géométrie d'Euclide. L'axioma-

tisation de l'économie se nourrit directement de la démarche *hypothético-déductive* des modernes, précisant qu'il n'est « pas nécessaire que les principes et les propositions soient vraies pour qu'une relation déductive s'établisse entre les premiers et les secondes » (Mongin [2003], p.102-103). Cette séparation entre anciens et modernes provient de la définition retenue par les uns et par les autres. Cependant, donner une définition claire de l'axiomatique n'est pas une mince affaire. Mongin n'évoque pas d'ailleurs sans honnêteté, une « importance reconnue à la méthode », que l'on en soit un fervent partisan ou non, mais aussi un certain « embarras persistant » quand il s'agit de la définir. Elle diffère et se complexifie selon les disciplines qu'elle examine — différentes des mathématiques et de la logique — telle que l'économie. Son aspect évolutif peut lui permettre de prendre plusieurs formes possibles, s'adaptant et servant plusieurs ambitions différentes. C'est pourquoi nous parlerons d'axiomatics économiques, au pluriel.

Nous pouvons toutefois dégager des caractéristiques communes à cet ensemble d'axiomatics économiques. La première est son utilisation récurrente dans un travail théorique et « son application peut alors représenter une avancée reconnue » (*Idem*, p.100). La seconde caractéristique et pas des moindres, avance que beaucoup d'erreurs sont commises lors de son utilisation, par « ceux-là mêmes qui la pratiquent et la valorisent » (*Idem*, p.100). Ces deux caractéristiques communes ne suffisent en rien à donner une quelconque ébauche de définition. Ainsi, afin d'en donner une définition viable et complète nous allons opérer de la même manière que Mongin ; pour ce faire nous allons stipuler de quels concepts elle se distingue, pour dans un second temps, les utiliser à bon escient et permettre sa construction. L'axiomatisation se dissocie de la déduction, de la symbolisation — « procédé technique consistant à remplacer des signes formés dans une langue par des signes d'un autre langage, le remplacement étant uniforme et cohérent » (p.106) — et de la formalisation, qui consiste à « traiter les signes en faisant abstractions des significations qu'on leur attribue » (p.106). Si le processus axiomatique ne se réduit pas à l'un de ces trois concepts, il s'en inspire. Nous allons procéder en deux étapes pour mettre en lumière la construction de l'axiomatique des modernes. Ce point est important car nous le retrouverons dans différents domaines économiques sous

différentes formes. Il nous permettra notamment de mieux saisir la place de Debreu dans son traitement de l'unicité.

Ainsi la première étape institue la complémentarité entre la symbolisation et la formalisation. L'axiomatisation moderne ne se réalise véritablement qu'avec une formalisation parfaite. Or cette dernière nécessite la symbolisation pour définir le cadre, i.e, les mesures sémantiques, linguistiques dans laquelle elle va évoluer, afin de s'exprimer pleinement. « (...) l'axiomatisation, au sens moderne, demande la formalisation, et donc la symbolisation, pour réaliser ses potentialités. Aussi longtemps que l'on n'isole pas les règles permettant d'agir sur les signes, la liaison déductive entre axiomes et théorèmes risque d'être contaminée par les significations »(p.107). Cela commence avec Peano, en 1889, et la mise en relation réussie entre la formalisation et l'axiomatisation, puisqu'elle permet « d'établir définitivement la valeur strictement hypothético-déductive de celle-ci »(p.107).

La seconde étape consiste à détailler le rôle central joué par le *système formel*. Il permet de mettre en relation, de réunir la formalisation et l'axiomatisation. Mongin prend comme exemple probant le calcul propositionnel : « Le système formel du calcul propositionnel comporte des règles morphologiques définissant les formules complexes à partir des formules plus élémentaires et des connecteurs ; ; un petit nombre d'axiomes liant entre elles certaines formules ; et une règle d'inférence unique (le modus ponens). Appliquée de façon répétée aux axiomes, la règle permet de prouver des théorèmes. Comme les autres notions, celles de preuve et de théorèmes sont formellement définies, et il en va de même de celle de conséquence logique »(p.108). La présence d'un système formel suggère le respect de trois conditions *sine qua non* :

- La cohérence (ou la consistance) qui indique une contradiction de contradiction interne.
- L'indépendance — « Les axiomes choisis sont indépendants si aucun d'eux ne peut être obtenu comme théorème en utilisant les autres ».
- La décidabilité, autrement dit « le système est décidable si, pour chaque formule, on peut décider à l'aide d'une procédure finie si cette formule est

un théorème ou non ».

Notons que l'axiomatisation ne doit pas être réduite à une symbolisation indépendante, en somme à une quelconque formalisation. L'axiomatisation est une idée bien plus large. Mongin parle ainsi d'axiomatisation que si les trois propriétés suivantes sont remplies : (i) la formalisation choisie doit borner de manière explicite et définitive les axiomes retenus, (ii) elle a le devoir de circonscrire les opérations autorisées sur les signes de manière au moins implicite à défaut de ne pas décider d'une inférence particulière, (iii) « elle s'impose, et cela reste de nouveau le plus souvent implicite, une contrainte générale d' 'effectivité' : la plus évidente est le choix d'un ensemble fini de propositions premières ; en un sens plus vague, qui demande à être confronté à d'autres objectifs, on s'efforce d'en limiter le nombre ». Ces trois propriétés se retrouvent sous différentes formes en économie, affaiblies ou non. La première notable est celle proposée par von Neumann et Morgenstern (1944) s'inscrivant chez les théoriciens des jeux et de la décision. Ensuite nous avons celle des théoriciens du choix social avec Arrow notamment. Enfin nous avons les théoriciens de la valeur comme Debreu. Ce dernier attire particulièrement notre intérêt. Comme nous l'avons précisé plus haut, même si nous venons de présenter une définition générale de l'axiomatisation, en économie nous en dénombrons plusieurs. Debreu s'est directement inspiré de l'axiomatisation ensembliste instaurée par le Bourbakisme. La méthode axiomatique du Cercle Bourbaki s'articule à son tour en deux étapes. Dans un premier temps, il s'agit de définir des *structures*¹¹. Ensuite, il s'agit de les mettre en relation via un système ; une étape subtile et complexe. L'une des particularités de cette axiomatique mise en avant par Mongin est qu'elle détériore assurément la frontière ténue qu'il y a entre syntaxe et sémantique¹². Bourbaki n'est pas sans connaître la distance importante qu'il développe et qu'il persiste à faire exister entre l'axiomatique et l'intuition sensible. Cela a un impact très important dans le travail économique chez Debreu. En effet il va

11. « Une structure, dans le langage de l'école, est d'abord un ensemble indéterminé, qui est doté de certaines opérations, fonctions, relations, soumises à des conditions »(p.115)

12. « La sémantique y est répartie entre les limbes heuristiques du travail axiomatique et certains développements qui appartiennent à la syntaxe, ce qui heurte à première vue le sens logique. Le mathématicien accomplit en une fois deux actes que le logicien voudrait séparer à la fois conceptuellement et pratiquement »(p.117)

davantage se concentre sur les cohérences internes, sur les inférences plutôt que sur l'interprétation. L'axiomatisation prônée par Debreu joue un rôle *définitionnel* selon Mongin : « elles servent uniquement à fixer un cadre d'analyse formelle qui est simple et univoque, en coupant court aux difficultés qu'apportent les interprétations »(122). En soi, l'*économie abstraite* de Debreu ne génère pas d'interprétations économiques directes, elle n'est qu'un cadre, qu'une définition à l'intérieur de laquelle il nous faut rajouter des conditions pour obtenir de véritables résultats de dimension économique.

Ainsi si l'on se situe de nouveau dans l'appréhension du problème de l'unicité, on saisit dès lors l'insuffisance de l'étude proposée par Debreu. Même si son travail permet une avancée conceptuelle, rigoureuse et fournit un cadre scientifique nouveau, qu'advient-il des interprétations économiques explicites et claires ? Que faisons nous dès lors de l'applicabilité de l'unicité et de ses modèles ?

En somme, nous tenterons de répondre à la problématique suivante : quels sont les changements qu'impliquent la question de l'Unicité dans une perspective d'Equilibre Général à la Debreu ?

Plan

Pour mieux saisir les enjeux que soulève l'étude de l'unicité dans un environnement économique conceptualisé par Debreu, il nous faut nous munir d'une perspective historique et empirique. La présentation du contexte intellectuel dans lequel Debreu a conçu ses idées ne suffit pas pour comprendre ce qu'engendre ce point du triptyque. Une vision plus large est nécessaire.

Nous présenterons donc dans une première partie une histoire de l'unicité en nous concentrant essentiellement sur deux mathématiciens-économistes que sont Wald et Debreu. L'étude du travail de Wald ne peut être omise d'une part parce qu'il est le premier à considérer la question depuis la mise en oeuvre du triptyque, même si les mathématiques empruntées ne lui ont pas permis de séparer sa preuve

de l'existence de celle de l'unicité; ensuite parce qu'il définit et aborde l'unicité d'une tout autre manière que Debreu. Appréhender Wald avant Debreu permet, au delà du devoir d'une retranscription historique cohérente, de mettre en évidence la rupture qui s'effectue dans leurs traitements respectifs. Cette rupture détient une place centrale puisque dès lors, le cadre théorique dans lequel va être appréhender la question de l'unicité va changer tant de manière qualitative que quantitative. Ce changement théorique aura un impact direct sur les modèles et les études empiriques de l'unicité.

Nous développerons par conséquent dans une seconde partie l'aspect applicable de l'unicité. Cela nous permettra d'étudier les limites du travail de Debreu et ce qu'implique un changement de statut de l'unicité. L'entreprise poursuivie *in fine* n'est pas d'argumenter sur l'abandon ou non de la TEG — question peu pertinente s'il en est — mais davantage pourquoi en est-on arrivé à ces positions, pourquoi le cadre érigé par Debreu, bien que très contraignant est-il toujours aussi présent et quelles sont les orientations à favoriser désormais.

Première partie

Histoire de l'Unicité de Wald à
Debreu

Cette partie englobe plusieurs démarches. La première est une démarche vulgarisatrice. Elle ne se présente ni comme une analyse historique linéaire des concepts, ni comme une présentation sans relief des auteurs marquants, ayant abordé la question de l'unicité. Elle est formulée davantage comme une analyse thématique vulgarisatrice. La seconde démarche s'appesantit plus sur la forme. Il s'agit de rompre avec un examen inerte, statique de la TEG. Essayer de reconstituer le mouvement même de l'évolution, c'est, selon nous, être au plus près dans la compréhension à la fois conceptuelle et pratique de l'unicité. Limiter l'étude à Wald et à Debreu nous permet d'allier ces deux approches sans perdre en substance. Ils adoptent deux postures différentes, ils incarnent deux perceptions dissemblables de la TEG, percevables comme des marqueurs incontournables.

Ainsi notre dessein, dans un premier temps, consiste à détailler les deux positions quant à l'unicité, pour ensuite, en recourant à une analyse dynamique, expliquer, décrire le sentier emprunté afin d'en pointer les limites.

Chapitre 1

Wald, l'économiste de la fracture et de la continuité

Ce premier chapitre a pour but de démontrer en quoi, Wald, de par son environnement, de par ses aptitudes, s'affirme à la fois comme un mathématicien et comme économiste. En cela il rompt avec ses prédécesseurs qui n'alliant qu'assez peu ou mal les deux, sans toutefois négliger l'un ou l'autre aspect. Or ne pas négliger les deux aspects ne signifie pas réussir à les exposer de la même manière, avec la même intensité et la même rigueur. L'ambition de mettre les mathématiques au service de l'économie, pour, le cas échéant, féconder la dernière par la première — à l'instar des ingénieurs français du XIX^{ième} siècle et la création de la mécanique industrielle (la fécondation désignait ici celle de la mécanique par l'économie) — ne se réalise pas tout à fait comme prévu. Même si sa démarche est noble, les apories en découlant nous rappèlent celles que toutes l'économie mathématique connut. C'est pourquoi, en ce sens, il ne peut qu'être dans le prolongement des théoriciens qui on tenté comme lui de mener à bien ce projet très ambitieux, sûrement trop ambitieux, que fut et qu'est la démonstration de la validité de la TEG, mathématiquement et économiquement.

1.1 L'environnement intellectuel et économique des années 1930

La démonstration de l'existence et de l'unicité de l'équilibre proposée par Abraham Wald est la résultante de la mise en relation de nombreux facteurs. Des facteurs intellectuels, scientifiques, relationnels, pour n'en citer que quelques un. Il est inconcevable voire incongru de ne pas parler du Cercle de Vienne si l'on s'attache à décrire l'engouement intellectuel qui règne en Europe dans les années 1930.

Rappelons que l'ambition de ses partisans est d'évincer la métaphysique de la science puis « d'unifier celle-ci au nom d'une méthode logique, articulée à une définition rigoureuse de ce qu'est un énoncé doué de sens, et susceptible de faire avancer la connaissance » (Le Gall [1991]). Le soucis d'agrandir la somme de connaissances n'est rendu possible que par le seul canal viable, le canal scientifique. Cette unification de la science est assurée d'une part à l'aide un langage formel, qui aura été préalablement choisi, et d'autre part avec le concours des faits réels, grâce auxquels elle existe. Afin d'augmenter la somme de connaissance il faut se limiter à l'étude des faits, à la *surface*, se borner à les expliquer le plus clairement possible sans se perde dans les méandres abyssales de la métaphysique. Ainsi tout repose sur le langage. Les mathématiques répondent parfaitement à cette construction idiomatique conceptuelle et logique. Cet édifice repose sur des concepts les plus épurés, les plus clairement formulés ; on reconnaît les caractéristiques de l'axiomatique. La place des mathématiques est très importante au sein du Cercle de Vienne, et particulièrement pour Menger. Il crée un Colloque, en y conviant des mathématiciens très brillants tels que Brouwer, Hahn, von Neumann ou encore Wald.

Wald se retrouve ingénieur à Vienne avant d'intégrer, un an plus tard l'université de Vienne pour y étudier les mathématiques. C'est là bas qu'il rencontre Wald, qu'il observe et constate sa finesse d'esprit et c'est ainsi qu'ils commencent à travailler ensemble. Wald se perfectionne assez vite, grâce au climat de stimulation intellectuelle développé. De grands noms participent à ce colloque (Gödel, Tarski, etc), ce qui ne fait qu'accentuer la curiosité et la rigueur dont fait preuve Wald. Cette riche activité intellectuelle l'invite à présenter rapidement une première dé-

monstration de l'EG.

Ce cadre propice est entaché par l'instabilité politique que connaît Vienne à cette époque. Elle empêche Wald d'obtenir un poste à l'Université de Vienne. Seulement lorsque le facteur politique contrarie l'évolution assurément favorable d'une situation, les relations sociales apparaissent comme la solution pour réparer l'injustice. Menger a un ami, Karl Schlesinger, banquier et économiste, qui émet le désir de se perfectionner en mathématiques. Il lui conseille logiquement Wald. La connexion Menger - Wald - Schlesinger est fortement productive et bienvenue. Nous pouvons même ajouter que la liaison Wald-Schlesinger est efficace et pour le moins notable puisqu'elle « symbolise la rencontre entre un courant de tradition walrasienne — dans lequel les mathématiques n'ont encore, au mieux, qu'un rôle de présentation — et des méthodes mathématiques de résolution effective » (*Idem*). En effet si Schlesinger nécessite une aide en mathématiques, Wald peut, par l'intermédiaire de son nouvel ami, se pencher plus sérieusement sur l'analyse de la production économique.

Ils concentrent ainsi leurs efforts sur la preuve de l'existence de l'équilibre général. Là où Schlesinger bloque techniquement, Wald apporte une solution, pour qu'ils puissent ensuite, interpréter économiquement les résultats. Les travaux débutent par la reprise de ceux effectués par Cassel¹. Ce dernier est à l'origine d'un système walrasien commode, se fondant sur des fonctions de demande quelque peu simplifiées. Cette apparente simplicité a pour origine le rejet total de la théorie de l'utilité. Il manipule des prix et des fonctions de demandes sans se demander d'où peuvent provenir leurs fondements. Il « a placé les prix au coeur de sa théorie d'allocation, et utilisé les facteurs de la demande comme concepts premiers »² (Weintraub [1985], p.59). Cassel reproduit un raisonnement similaire à celui de Walras, en ce sens qu'il perpétue l'idée selon laquelle si le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations alors le système admet une solution, et par conséquent l'EG existe. Il faut attendre les travaux de Hans Neisser (1932) et Heinrich von Stackelberg (1933) pour prouver que cette idée reçue n'est pas suffisante. En effet, ils parviennent à un résultat dès moins interprétables puisque

1. *Traité d'Economie Politique*, première édition allemande 1918.

2. traduction de Weintraub proposé par P. Le Gall, que nous avons reprise

les valeurs obtenues pour les solutions du système sont négatives. Or des prix et des quantités négatives n'ont aucun sens économiquement. Bien que ces travaux restent confidentiels, un nouveau concours de circonstance vient de nouveau bouleverser, positivement, l'évolution des recherches sur l'existence et l'unicité de l'EG. Le contexte intellectuel joue un rôle essentiel dans la découverte de ces travaux. C'est par l'intermédiaire du séminaire de Mathématique de K. Menger que Schlesinger prend connaissance de ces résultats.

Fort de cette découverte, il s'attèle à la démonstration de sa preuve en opérant par étapes. Dans un premier temps il enrichit et améliore le système simplifié de Cassel, notamment avec l'intégration des facteurs de production libres³ afin de faire disparaître l'hypothèse de rareté, jugée trop contraignante, qui provient du schéma walrasien. La suite est prévisible puisque Wald s'occupe de trouver une solution au récent système.

Cette contextualisation nous semblait nécessaire pour prendre connaissance des sources intellectuelles dont s'inspire directement Wald — telle que le modèle de Cassel et la place de la signification économique ou encore la première vague d'axiomatisation moderne mathématique — afin de mener à bien son projet : la preuve de l'existence et de l'unicité de l'équilibre général. Nous pouvons désormais présenter les trois articles de Wald et ce que nous nommons son modèle.

1.2 Le modèle de Wald

Le titre ne doit pas induire en erreur le lecteur. Wald écrit plusieurs articles dans les années 1930 afin de prouver l'existence et l'unicité de l'EG, cependant il ne fait que reprendre, résoudre, approfondir, affiner le cas échéant, l'article écrit par Schlesinger. C'est pourquoi, nous allons tout d'abord présenter le programme de Schlesinger, en annonçant les contributions de Wald pour ensuite exposer conséquemment, les changements mathématiques et les intuitions économiques institués par Wald.

Schlesinger reprend le système développé par Cassel afin d'accroître sa portée

3. Ce changement lui fut inspiré et recommandé par Zeuthen en 1932.

1.2. LE MODÈLE DE WALD

en relâchant l'hypothèse de « rareté des facteurs de production libres, c'est-à-dire — *ex post* — non entièrement utilisés » (Le Gall, [1991]) jugée trop restrictive. Le système s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}s_j + u_i, & i = 1, \dots, m \\ \sigma_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}p_i, & j = 1, \dots, n \\ \sigma_j = f_j(s_1, \dots, s_n), & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Avec

- R_1, \dots, R_m les facteurs de production, indicés i ,
- r_1, \dots, r_m les quantités de ces facteurs de production,
- p_i, \dots, p_m leur prix,
- S_i, \dots, S_n les n biens produits, indicés j ,
- s_1, \dots, s_n les quantités de ces biens produits,
- $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ leur prix,
- a_{ij} les coefficients techniques (i.e. la quantité du facteur de production i nécessaire à la production du bien j).

Plusieurs modifications sont apportées par rapport au système de Cassel. Tout d'abord, la troisième équation, traduit la relation existante entre les prix de chaque bien et la quantité des différents biens produits. Cassel recourt à une relation de demande walrasienne, soit formellement $N_j = F_j(p_1, \dots, p_n)$, alors que Schlesinger opte pour une relation de demande marshalienne, soit formellement $\sigma_j = f_j(s_1, \dots, s_n)$. Ce passage d'une formulation à une autre est et reste inexplicable. Weintraub est le premier à mettre en lumière ce mystère mais conclut, de manière tout aussi surprenante, qu'aucune hypothèse ne peut être à l'origine d'un tel changement. Ensuite, la première équation est remaniée. Schlesinger ajoute des *variables d'écarts*, notées u_1, \dots, u_n , afin justement de « lever l'hypothèse de rareté des facteurs de productions. ». Ces m nouvelles variables instaurent des *relations d'exclusion*, i.e. dès lors qu'un facteur de production n'est pas complètement consommé pendant le processus de production, son prix est nul. A l'inverse s'il l'est, son prix devient et reste

strictement positif (formellement cette relation se nota : $u_i \geq 0$, et si $u_i > 0$ alors $p_i = 0$).

Toutes ces nouveautés compliquent la résolution du système, qui comporte depuis, des égalités et des inégalités. C'est avec ces données que Wald commence à résoudre le problème de l'existence et de l'unicité, en statuant, en premier lieu, comme ingénieur mathématicien avant de pouvoir faire preuve d'une grande intuition économique perceptible dans ses travaux ultérieurs.

Le premier article de Wald vit le jour en 1935⁴. Il reprend le système développé par Schlesinger, en opérant un changement toutefois dans le troisième ensemble, i.e. $\sigma_j = f_j(s_1, \dots, s_n)$ devint $\sigma_j = f_j(s_j)$. Cela implique que pour le bien j , son prix ne dépend que ses quantités et non des quantités des autres biens.

Cela nous donne donc le système suivant :

$$\begin{cases} r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}s_j + u_i, & i = 1, \dots, m \\ \sigma_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}p_i, & j = 1, \dots, n \\ \sigma_j = f_j(s_j), & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

avec ici :

- r_i et a_{ij} sont donnés,
- f_j sont des fonctions connues,
- u_i, p_i, s_j, σ_j sont les inconnues.

Ce système admet une unique solution pour les variables u_i, s_j, σ_j dès lors que conditions suivantes sont respectées et que l'on va numéroter afin de simplifier nos

4. « Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen (Mitteilung I) », *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 6 : 12-8, 1935. Traduction anglaise : On the Unique Negative Solvability of the New Production System, part 1, in W.J. Baumol et S.M. Goldfeld, p.281-288.

1.2. LE MODÈLE DE WALD

futurs développements :

- (1) $r_i > 0, i = 1, \dots, m$;
- (2) $a_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n$;
- (3) $\forall j \in [1, \dots, n], \exists i \in [1, \dots, m], a_{ij} \neq 0$;
- (4) pour tout j ($j = 1, \dots, n$), la fonction $f_j(s_j)$ est définie pour tout s_j positif, est non négative, continue et strictement décroissante, i.e. :

$$s'_j < s_j \implies f_j(s'_j) > f_j(s_j) ;$$

et de plus

$$\lim_{s_j \rightarrow 0} f_j(s_j) = \infty$$

sous les conditions suivantes :

- (a) $s_j \geq 0, j = 1, \dots, n$;
- (b) $\sigma_j \geq 0, j = 1, \dots, 0$;
- (c) $p_i \geq 0, i = 1, \dots, m$;
- (d) $u_i \geq 0, i = 1, \dots, m$;
- (e) Si $u_i > 0$ alors $p_i = 0, i = 1, \dots, m$.

Cependant les fonctions de demande simplifiées subissent des critiques importantes que Wald s'empresse de prendre en compte. Menger présente une critique que l'on peut séparer en deux blocs. Le premier consiste à revenir sur la forme et le second

sur le fond.

Menger confère une grande élégance ainsi qu'une considérable clarté à la preuve de Wald. Il la qualifie même d'« une des plus importantes de l'économie mathématique ». En revanche, il se montre plus sceptique quant au fond de la démonstration. Même s'il trouve les hypothèses retenues par Wald comme nécessaires et suffisantes, en précisant que son travail permet de montrer que ces hypothèses reposent sur deux principes fondamentaux de la théorie de la valeur subjective⁵, il émet quelques doutes sur leurs contenus empiriques, i.e. sur leurs caractères incontestables dans la sphère de l'économie réelle. « En général, ces hypothèses sur f_i ne sont pas exactement satisfaites dans la réalité ; en particulier, ce n'est pas vrai que chaque augmentation de l'offre d'un bien conduira à une baisse du prix du bien »⁶. Accordant un crédit non négligeable à son ancien professeur, Wald publie un second article en prenant en compte les remarques émises sur ses fonctions de demande simplifiées.

Ainsi, dans son nouvel article publié en 1936, Wald renoue avec le système de Schlesinger, en le remaniant toutefois marginalement. En effet, il y insère les *relations d'exclusion*, expliquées précédemment.

Le nouveau système donne :

$$\begin{cases} r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}s_j + u_i, & i = 1, \dots, m \\ p_i u_i = 0, & i = 1, \dots, m \\ \sigma_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}p_i, & j = 1, \dots, n \\ \sigma_j = f_j(s_1, \dots, s_n), & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

5. Le premier principe évoqué par Menger est la loi de la satiété qui traduit le fait qu'avec des offres de grande ampleur, les prix chuteront. Le second principe développe l'idée selon laquelle « la valeur des moyens de production se conforme à la valeur éventuelle de leur produit ».

6. Ces propos sont ceux de Menger, dans la critique effectuée sur le premier article de Wald. On les retrouve dans l'ouvrage de W.J. Baumol et de S.M. Goldfeld, *Precursors in mathematical economics : an anthology*.

1.2. LE MODÈLE DE WALD

Ce qui est important de noter dans ce nouvel article, ce sont les nouvelles conditions d'existence et d'unicité de l'équilibre mises en avant par Wald, suite à ce retour au système initial, quelque peu transformé. Il reformule la condition (4), présentée précédemment, puis en énonce deux autres.

- (4) La fonction $f_j(s_1, \dots, s_n)$ est définie, positive et continue pour tout n -uplet (s_1, \dots, s_n) non négatif pour lequel $s_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$.
- (5) Pour tout j , $j = 1, \dots, n$, on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_j(s_1^k, \dots, s_n^k) = \infty$$

Si le n -uplet non négatif (s_1^k, \dots, s_n^k) ($k = 1, 2, \dots$), tel que $s_j^k > 0$, converge vers un n -uplet (s_1, \dots, s_n) tel que $s_j = 0$.

- (6) Soit $(\Delta s_1, \dots, \Delta s_n)$ un n -uplet dont au moins l'un des éléments est strictement négatif; soit ;

$$\sum_{j=1}^n \sigma_j \Delta s_j \leq 0 ;$$

Alors, on a :

$$\sum_{j=1}^n \sigma'_j \Delta s_j < 0$$

avec $\sigma'_j = f_j(s_1 + \Delta s_1, \dots, s_n + \Delta s_n)$, $j = 1, \dots, n$.

Wald s'arrête sur la condition (6) et fait des remarques éminentes, notables.

Elles sont d'ordres économiques et permettent d'entrevoir pour la première fois, véritablement, l'intuition économique conséquente de Wald. Seulement avant de nous étendre sur la dimension interprétative essentiellement présente dans le troisième article de Wald⁷, attardons-nous quelques instants sur ce deuxième article

7. « Über einige Gleichungssysteme der mathematischen Ökonomie », *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 7, p.637-670, 1936, traduction anglaise : On some Systems of Equations of Mathematical

et sur la condition (6w) développée par l'auteur.

Dans un premier temps, nous allons détailler la situation en présentant le cheminement qui a permis d'aboutir à la condition (6w); cette présentation sera succincte. Pour ce faire nous nous appuyons sur le travail de P. Le Gall⁸, en le citant explicitement :

« Soit W un agent lambda composant l'économie qui, à des prix $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, demande des quantités (s_{w1}, \dots, s_{wn}) des biens (S_1, \dots, S_n) . La quantité s_j est la somme des quantités demandées par tous les individus [pour le bien j]. Si maintenant, à des prix $(\sigma'_1, \dots, \sigma'_n)$, cet individu demande $(s_{w1} + \Delta s_{w1}, \dots, s_{wn} + \Delta s_{wn})$, l'un au moins de ces Δs_{wj} étant strictement inférieur à 0 et tel que :

$$\sum_{j=1}^n \sigma_j \Delta s_{wj} \leq 0,$$

alors :

$$\sum_{j=1}^n \sigma'_j \Delta s_{wj} < 0.$$

Wald remarque que si cette condition — qu'il baptise (6w) — est vérifiée pour tout individu, la condition (6) ne l'est pas forcément. Quoi qu'il en soit, si la condition (6w) est vérifiée pour tout individu et si la condition (6) ne l'est pas, 'des relations particulières doivent être envisagées entre les demandes des différents individus statistiquement improbables' (Wald [1936]a, p.292) ».

Dès lors, quelles relations particulières doivent être envisagées? La réponse est avancée par Weintraub⁹. Selon lui, la condition (6w) établit pour la première fois l'*axiome faible des préférences révélées*, exprimé véritablement comme tel par Samuelson, quelques années plus tard, en 1938. Wald a ainsi le premier l'intuition

Economics, *Econometrica*, 19, Oct.1951, p.368-403.

8. *La première démonstration de l'existence d'un équilibre général*, par Abraham Wald (1935-1936), in Economies et Sociétés, Série (Economia, PE n°15, mai 1991, pp.117-137.

9. *General Equilibrium Analysis, Studies in Appraisal*. Cambridge university Press, Cambridge, 1985.

1.2. LE MODÈLE DE WALD

d'une proposition qui détiendra une place centrale dans la théorie économique. Puis, la seconde remarque liée à cette condition, met en lumière une autre intuition économique, fondamentale s'il en est, puisqu'elle poindra comme un argument essentiel dans les démonstrations concernant l'unicité et la stabilité de l'EG, des décennies plus tard (les travaux de Wald pour l'existence et les travaux de Arrow-Hurwicz pour la stabilité de l'EG (1958-1960)). Cette intuition fera naître la proposition que l'on nommera la *dominance diagonale*; elle stipule simplement qu'« il est suffisant de supposer que l'utilité marginale du bien S_j est beaucoup plus affectée par un changement des quantités possédées de S_j que de tout autre bien » (Wald [1936]a, p.293). Formellement, l'idée de la *dominance diagonale* émane de l'étude la dérivée première de (6w). Soit $\phi_{wj}(s_{wj})$ la fonction d'utilité marginale du bien S_j pour l'individu W. Aussi, « la dérivation de (6w) peut être basée sur l'hypothèse (...) que, pour tout j , le nombre $\frac{\partial \phi_{wj}(s_{wj})}{\partial s_{wj}}$ est négatif et grand par rapport à $\frac{\partial \phi_{wj}(s_{wj})}{\partial s_{wk}}$, $k \neq j$. Il n'est donc pas nécessaire de supposer que l'utilité marginale du bien S_j pour l'individu W soit indépendante de la quantité qu'il possède des autres biens (...) ».

Wald écrit un dernier article, non plus pour détailler et approfondir ses résultats mathématiquement, mais afin d'attribuer une interprétation économique à ses résultats. Ce qui retient notre attention, n'est pas son étude des conditions nécessaires pour l'unicité précisément sinon son effort de donner un caractère positif, empirique à cette posture très théorique. Cela fut et continue à être une caractéristique du *modèle de Wald*, que nous nous ingénions à ériger.

Dans un premier temps il ne fait qu'honneur à l'extrême rigueur que nombres de ses collègues lui accordent, en explicitant le sens économique de certaines conditions d'après la signification des variables retenues dans le modèle. Cette étape ne laisse apparaître aucune intuition économique. Mais elle peut être symptomatique d'un projet qui se veut être réalisé entièrement ou pas du tout. D'où, les trois premières conditions sont précisées de la manière la plus simple, voire triviale possible; il ne s'en dispense pas pour autant :

- (1) Une quantité positive de chaque facteur de production est disponible.
- (2) Les quantités des facteurs utilisés dans la production sont non négatives.
- (3) Au moins un facteur de production est nécessaire à la production de chaque bien.

Ensuite, il tente de nouer subtilement la mathématique et la sphère économique réelle ; il désire extraire d'un raisonnement qui se veut objectif, logique et générique, une dimension positive qui permet une applicabilité, pour que cette construction abstraite ne reste pas vaine. L'apport conceptuel des mathématiques est primordial car il ne sert pas que la mise en forme du problème mais aussi sa stratégie de justification. On retrouve la notion de fécondation de l'économie par les mathématiques pour créer non pas une mathématique économique mais une économie mathématique, nouvel objet, nouveau concept qu'essaye d'édifier Wald. Pour gagner en généricité, il utilise des *passages à la limite* dans son argumentation. En témoigne les interprétations proposées des conditions (4) et (5) :

- (4) La relation entre les prix et les quantités demandées des produits est continue. Wald précise que l'on peut difficilement émettre d'objections à cette condition. En effet, même s'il est souvent maintenu que dans la sphère économique réelle les fonctions de demande n'ont pas besoin d'être continues, l'approximation proposant la continuité ne semble pas aberrante ni hors de propos. Cette idéalisation étant mineure, elle permet néanmoins une simplification non négligeable pour le traitement mathématique associé.
- (5) La demande s_J pour un bien S_j est nulle seulement quand son prix devient infini. Autrement dit cette demande est positive pour tout prix fini de ce bien. Selon Wald, cette condition n'est pas entièrement vérifiée dans la réalité : elle est généralement nulle pour certains prix élevés mais finis. Il considère cependant que cette idéalisation est extrêmement mineure et

insignifiante.

Les positions de Wald, quant à l'économie mathématique, adviennent assez nettes. La fécondation de l'économie par les mathématiques traduit la volonté d'une « utilisation harmonieuse des mathématiques en économie ». Ce souci de justification économique des hypothèses provient du fait que selon lui, les conclusions ne peuvent être valides que sous ces hypothèses. C'est pourquoi, le niveau de réalisme inscrit dans la théorie doit être suffisamment conséquent. Mais, il admet aussi que la compréhension de la complexité du monde social, dans lequel l'économie évolue, ne peut s'obtenir sans, ce qu'il nomme, des abstractions substantielles. Elles doivent être même envisagées dans un premier temps pour ensuite se voir remplacer petit à petit par des hypothèses vérifiées dans la sphère réelle.

En somme, « si cette démarche est respectée, il sera toujours facile de connaître avec précision le moment où, dans une démonstration, les hypothèses ou conditions sont trop simplifiées ou irréalistes. Celles-ci devront alors être remplacées par des hypothèses plus pertinentes, afin que 'les théories, en dernière instance, soient applicables au monde réel' (*ibid*)¹⁰ ».

10. Wald [1936]b, p.369.

1.3 Des limites du modèle de Wald à la mise entre parenthèse du programme scientifique de l'économie mathématique

Alors que le travail de Wald s'avère être incontestablement riche et novateur pour la recherche économique, des limites viennent réduire l'impact qu'il aurait dû avoir. D'aucunes sont soulevées directement par Wald ou indirectement par les chercheurs qui s'intéressent sérieusement à ses écrits. Notre intention n'est pas de procéder à une liste exhaustive de ces limites mais plutôt de mettre en exergue celles qui nous apparaissent comme les plus importantes, caractérisant la singularité du mathématicien-économiste hongrois.

Selon nous, l'impératif réaliste du modèle fait à la fois sa force et sa faiblesse. La sphère sociale demeure trop dense pour pouvoir être concentrée en un nombre fini d'hypothèses, aussi pertinentes et justes soient elles. Wald le reconnaît lui-même : « Tout d'abord, il est supposé que rien n'est épargné, le problème de la formation du capital et du taux d'intérêt n'est pas traité (le système est ici statique). De plus, il est supposé que la production d'une unité du bien S_j n'est techniquement possible que par une méthode(...). Mais, en réalité, un bien peut être produit de différentes façons »¹¹(Wald [1936]b, p.379). Le caractère trop restrictif voire parfois peu réaliste des hypothèses détermine le manque d'applicabilité du modèle. La critique de Menger, explicitée plus haut, en est l'un des exemples probants. Même si Wald prend en compte le plus possible ces remarques afin d'y remédier au mieux, de nouvelles, du même ordre, voient le jour à chaque nouvel article. Gödel, suite à l'article de [1936a], indique, à son tour, qu'en réalité la demande de chaque individu ne dépend pas uniquement des prix des facteurs de production mais aussi du revenu.

Cette nécessité positive n'est pas anodine. Elle s'inscrit dans la tradition vérificationniste, proposé par le Cercle de Vienne, auquel Wald s'identifie. « Tout ce qui n'est pas observable doit être éliminé du champ théorique, les théories devant

11. Traduction effectuée par P. Le Gall.

1.3. DES LIMITES DU MODÈLE DE WALD À LA MISE ENTRE PARENTHÈSE DU PROGRAMME SCIENTIFIQUE DE L'ÉCONOMIE MATHÉMATIQUE

être ramenées à une base sûre, celle de l'expérience sensible. On peut considérer que les travaux de Wald sont une tentative d'application concrète du principe de réduction progressive des concepts à la réalité »(Le Gall [1991], p.133).

D'autres naissent du processus de fécondation de l'économie par les mathématiques, institué par les mathématiciens-économistes dont Wald est l'un des plus imposants représentants. Outre le fait que l'erreur peut provenir du degré de latitude accordée au réalisme des hypothèses – soucis qui s'établissent dans la mise en relation des faits empiriquement observés et du niveau de complexité de la formalisation (formulation mathématique la plus *légitime* possible sans perdre en précision) – elle peut advenir des mathématiques employées. Wald a recours à l'induction dans ses preuves de l'existence et de l'unicité. Son utilisation de la méthode par récurrence ne fait pas consensus. Il suffit qu'un mathématicien rejette le principe d'induction – exprimant un saut logique – et c'est toute la démarche qui en pâtit. Il en est de même pour l'usage des mathématiques différentielles ; von Neumann s'oppose clairement à Wald, quant à l'utilisation de ces dernières. Il y a, au delà de cette critique, une perception différente du problème. Doit-on ou non inclure la réalité dans la résolution du problème ? von Neumann appréhende le problème essentiellement mathématiquement.

Enfin, certaines limites et pas des moindres, interviennent dans un contexte historico-économique et historico-politique défavorables.

Pendant les années 1930, deux courants de pensée s'opposent distinctement. L'un caractérisé par les allemands, se penche sur le problème de l'existence et de l'unicité de l'EG. L'autre, composé d'anglophones pour la plupart, s'intéresse davantage à la stabilité ainsi qu'à la statique comparative. Cette divergence compromet et repousse la découverte des écrits germanophones, à plus forte raison, lorsque se manifestent les idées keynesiennes. Cette nouvelle approche, dite macro-économique, non mathématisée et rompant nettement avec l'approche micro-fondée traditionnelle, prend le pas sur tout développement faisant appel aux mathématiques qui laissent encore effrayés nombres d'économistes à cette période. « Après la parution de la *Théorie Générale*, on ne perçoit pas que des systèmes tels que ceux de Cassel ou Schlesinger puissent comporter le moindre contenu macro-économique »(*ibid*,

p.133). De surcroît, la publication des écrits de Wald en allemand aide encore moins à le faire connaître. A ce bouleversement interne s'ajoute une dimension politique néfaste et préoccupante, empêchant la diffusion souhaitée des avancées effectuées par Wald. Le statut des juifs à Vienne évolue vite. Les conséquences sont terribles et la dispersion des scientifiques et de leurs travaux sont inévitables. Le contexte politique figure comme l'une des principales raisons du retard que prit la propagation des idées de ces chercheurs :

« En 1938, année de l'Anschluss, la publication des *Ergebnisse* est interrompue parce que la revue accordait trop de place à des contributions rédigées par des juifs. Schlesinger se suicide le jour de l'entrée des nazis en Autriche, Wald émigre aux Etats - Unis (...). Désormais la suite de l'histoire de l'équilibre général se déroulera aux Etats - Unis. Ce déplacement des hommes a favorisé la diffusion des connaissances. La publication en allemand, dans des supports peu et mal diffusés (c'est le cas des *Ergebnisse*), ne suffit pas plus aux Viennois pour faire connaître leurs idées que la publication des *Eléments* n'avait suffi à Walras pour diffuser les siennes »(A.Cot et J.Lallement, [2006]).

Ainsi, le concours inédit de Wald à la science économique nous amène aisément à le qualifier de précurseur. Bien que son travail met un certain temps à se faire connaître au delà des cercles de chercheurs germanophones, il est l'un des premiers mathématiciens économistes à recevoir un accueil aussi favorable et unanime. Si la complexité de ses preuves en laissent et en laisseront quelques uns sceptiques, parmi lesquels on retrouvera Debreu, elles n'en restent pas moins incontournables et font accepter, entrer, les mathématiques dans la sphère de la science économique via la TEG, l'existence et l'unicité de l'EG. Il essaye de démontrer l'existence et l'unicité *globalement* pour la première fois, de manière rigoureuse, en débloquent formellement et concrètement des problèmes jusqu'alors insurmontables mais n'y parvient pas pleinement. L'idée selon laquelle les économistes ne manifestent que peu de rigueur et de clarté dans leurs démonstrations littéraires devient fausse. En somme,

1.3. DES LIMITES DU MODÈLE DE WALD À LA MISE ENTRE PARENTHÈSE DU PROGRAMME SCIENTIFIQUE DE L'ÉCONOMIE MATHÉMATIQUE

trois caractéristiques¹² sont déceler chez Wald, qui le différencient de ses prédécesseurs A.Cot et J.Lallement¹³ les résument comme suit : « 1) En bon disciple de Hilbert, Wald affirme sa volonté de définir soigneusement ses hypothèses de telle sorte que la démonstration mathématique fondée sur celles-ci soit parfaitement rigoureuse. 2) Il recherche les hypothèses mathématiques minimales permettant que le système d'équation ait une solution et que cette solution soit unique. Ces hypothèses initiales portent sur les comportements individuels et sur les processus de production (rendements, coefficients de production). 3) Enfin, Wald conserve toujours à l'esprit que ses hypothèses et ses résultats, s'ils doivent être logiquement rigoureux, doivent aussi avoir une signification économique »(p.382). Ainsi si la démonstration de l'unicité reste à perfectionner, Wald éclaire sur la voie à suivre pour résoudre le problème : l'usage de l'économie mathématique.

Cependant, la présence des mathématiques en Economie ne remonte pas aux années 1930. Walras, Pareto, Fisher, l'école suédoise sont tout autant d'exemples nous invitant à nuancer nos propos. Wald bouleverse la science économique sur l'effectivité des mathématiques en économie — sur leur utilisation efficace et effective — et non sur le projet d'intégrer les mathématiques à l'économie en tant que tel. En cela, il ne fut qu'un disciple de Walras.

Il s'inscrit dans la continuité de ces derniers, en échouant à rompre avec les hypothèses trop restrictives pour dépeindre les événements réels ; user des mathématiques, de la modélisation, pour formuler, résoudre et dépasser des problèmes indicibles avec des mots, tout en essayant de leur donner une dimension et une interprétation économique pour juger de leurs impacts *a posteriori*, est une entreprise que Wald rejoint. Ce dessein survit aux époques, aux torsions qu'il connaît, pour se perpétuer dans les travaux d'autres économistes, d'une nouvelle façon. Debreu se retrouve dans le schéma d'économie mathématique. Cependant il pousse à l'extrême cette approche, en substituant l'interprétation économique à la généralité du modèle mathématique.

12. A.Zylderberg, [2000]

13. A.Cot et J.Lallement, « 1859-1959 : un siècle d'équilibre général », *Revue Economique*, Vol.57, n°3, Mai 2006, p.377-388

Chapitre 2

Debreu ou l'ultime preuve théorique

Les résultats de Wald mettent à mal les preuves liées tant à la stabilité, qu'à l'unicité. Elles reposent, là aussi, sur des hypothèses contraignantes telles que l'hypothèse de substituabilité brute – relation inter-marché énonçant que lorsque le prix d'un bien i augmente sur un marché, sa demande baisse et s'en suit une augmentation de la demande des autres biens j , sur tous les autres marchés et ce quelque soit j avec $j \neq i$ – ou encore la dominance diagonale – spécifiant que l'effet d'une variation du prix d'un bien i sur un marché l'emporte sur tous les effets indirects des prix des autres biens j sur ledit marché, quelque soit j avec $j \neq i$, sur ce marché. A ces limites interprétatives d'ordre économique, se joignent des querelles techniques de mathématiciens. En utilisant les mathématiques différentielles, Wald s'appuie sur l'idée que le monde économique peut être abordé par des fonctions de demande dérivables ; von Neumann réfute cette méthode et scinde le problème joint de l'existence et de l'unicité, en deux questions singulières, indépendantes. Partant, la problématique devient spécifique à l'objet étudié et la résolution revêt une dimension plus logique : l'enjeu pour l'existence est de montrer que l'ensemble mathématique considéré, traduisant l'ensemble des états possibles de l'économie, est non vide. Cette dichotomie opérée, les solutions aux problèmes liés à l'existence, à la stabilité ou à l'unicité sont de plus en plus mathématisées,

2.1. L'INTÉRÊT TARDIF DE DEBREU POUR L'UNICITÉ

jusqu'à l'infime présence voire l'absence de contenu économique dans les démonstrations.

Debreu, jeune mathématicien, disciple des membres du cercle Nicolas Bourbaki, profondément marqué par l'axiomatique, s'empare du problème de l'existence dès les années 1950, et propose, avec l'aide de J.K. Arrow, une preuve topologique de l'existence de l'EG. L'invasion des mathématiques (via la théorie mais aussi via l'empirique avec l'économétrie) dans la résolution des trois problèmes du cœur *immuable* de la TEG instaure une hiérarchie officieuse dans leurs traitements. Si l'existence retient essentiellement l'attention, grâce à son aspect plus mathématique qu'économique, pour la stabilité et l'existence, c'est plus ardu, le caractère économique des hypothèses étant décisif pour son interprétation ainsi que son applicabilité. C'est l'une des raisons pour lesquelles il faut attendre plusieurs décennies avant de pouvoir lire des travaux portant spécifiquement sur l'unicité. Debreu est l'un des économistes qui s'intéresse et apporte un regard substantiel, lequel nous allons désormais étudier.

2.1 L'intérêt tardif de Debreu pour l'unicité

Il débute véritablement sa carrière d'économiste aux Etats-Unis. En effet, après avoir suivi un cursus de mathématiques à l'Ecole Normale Supérieure à Paris il obtient une bourse de la fondation Rockefeller et déménagea aux Etats-Unis en 1948. En 1950, la *Cowles Comission* le recrute. Ses premiers travaux dévoilent un intérêt certain pour l'économie du bien être. De cet intérêt naît une collaboration avec J.K.Arrow, qui débouche sur l'un des articles fondateurs dans l'histoire de la TEG : « On the existence of an Equilibrium for a Competitive Economy ». Il est écrit en 1952 et publié en 1954. Cet article a un retentissement considérable au sein de la communauté économique puisqu'il expose la première démonstration de l'existence de l'EG. Arrow et Debreu recourent, pour ce faire, directement aux travaux de Nash — vulgarisant la généralisation du théorème du point fixe démontrée par Kakutani (1941) — qui aide grandement leur conception de l'économie. Aussi, ils l'appréhendent « comme un jeu dont les joueurs sont deux groupes d'agents

habituels (les consommateurs et les producteurs), avec un agent supplémentaire, le secrétaire de marché (*market participant*, un peu semblable au futur commissaire – priseur qui apparaîtra dans la littérature de la seconde moitié des années cinquante). Dans ce jeu particulier, les consommateurs maximisent leur utilité, les producteurs leurs profits, et le secrétaire de marché fixe les prix de manière à minimiser l'écart entre les offres et les demandes. Le théorème du point fixe qui assure l'existence d'une solution pour les jeux non coopératifs est alors mobilisé pour démontrer l'existence d'un équilibre général » (Cot et Lallement, [2006]b, p.1724). Depuis lors, Debreu concentre ses recherches exclusivement sur la preuve de l'existence de l'EG. Elles prennent forme dans un ouvrage conséquent, *Theory of value*, dans lequel il soumet une étude complète de l'existence d'un EG. Il effectue quelques changements notables : les hypothèses retenues sont moins contraignantes, moins fortes que celles présentes dans l'article de 1954. La démonstration demeure « plus élégante, plus simple et plus générale » (*ibid*, p.1725). On y décèle l'impact de la mathématique dispensé par les bourbakistes. Enfin « le secrétaire de marché disparaît ainsi que toute référence à la théorie des jeux. La nécessité d'un système complet de marchés est explicitée et des extensions possibles sont indiquées pour introduire de l'incertitude » (*ibid*, p.1725). Il est instructif de remarquer que Debreu limite les hypothèses à contenu économique. Il épure ses recherches précédentes pour ne conserver que celles qui n'entravent pas la généralité de ses preuves mathématiques. Contrairement à Wald, il ne se préoccupe pas de conserver un lien entre la réalité économique et la formalisation mathématique. En cela, il se situe dans la lignée des mathématicien-économiste comme von Neumann. Ni la mathématique usitée dans ses preuves — jugées trop lourdes, ni la dimension économique de Wald inspirent véritablement Debreu. Son projet est tout autre : beaucoup plus ambitieux mathématiquement et beaucoup plus humble économiquement.

En outre, l'intérêt tardif porté par Debreu à l'unicité provient aussi du fait que depuis les limites indiquées par les hypothèses dites *Wald-type*, il n'est plus possible de justifier l'unicité globale, via la stabilité, puisqu'elles s'appuient, toutes deux, sur des fonctions de demande quasiment identiques. La seconde option, tardive-

2.2. LA PREUVE DE L'UNICITÉ OU LE TOUR DE FORCE DE GÉRARD DEBREU

ment envisagée, est par conséquent de la traiter *localement*. Aussi, nous constatons un regain de curiosité à l'égard de l'unicité dans les années 1970. L'article déterminant, *Regular differentiable Economies*, est écrit par Debreu, en 1976. Seulement cet article représente le produit d'une réflexion qui débute quelques années auparavant, avec des articles publiés dès 1970, et qui est alimentée par toute une série d'articles d'autres auteurs tels que Dierker, Varian, Arrow, Hahn ou encore Nishimura. Présentons désormais le modèle de Debreu.

2.2 La preuve de l'unicité ou le tour de force de Gérard Debreu

Pour sortir de l'aporie de l'unicité globale de l'EG, Gerard Debreu s'appuie sur deux concepts. Le premier est d'ordre économique, qu'il invente et qu'il nomme les *économies régulières*. Puis, fort de cet environnement créé, il va user d'un outil mathématique — la topologie algébrique — afin d'opérer son tour de force et de remédier au problème cité ci-avant.

Définissons, dans un premier temps, ce qu'entend Debreu par une *économie régulière*. Pour ce faire, il considère tout d'abord un ensemble ξ , contenant toutes les économies sur lesquelles se porte l'étude. On y trouve un sous-ensemble C d'économies non régulières, le complémentaire étant composé d'économies régulières. Ensuite, il détermine un autre ensemble S , différent de ξ , d'états potentiels de l'économie.

Notre propos ici est de démontrer que l'ensemble C est négligeable ; en effet si ξ est composé, de manière quasi-certaine en terme de probabilités, d'*économies régulières*, alors S sélectionnera qu'un profil particulier d'économies. Le cadre pour la résolution sera posé et il restera à prouver pourquoi le statut d'*économie régulière* suffit à affirmer l'unicité de l'EG. Quelques conditions économique-mathématiques seront à définir, aucunes présentant des difficultés insurmontables.

Les *économies régulières* se distinguent des économies non régulières, dites *pathologiques*, en ce sens où elles sont caractérisées par un ensemble fini d'équilibres. L'un des points centraux de la démonstration se situe dans la transposition, opérée par

Debreu, du problème de l'unicité locale des équilibres à un problème d'ensemble fini d'équilibres¹. Avant de nous attarder sur ce changement essentiel, intéressons nous à la structure même de l'ensemble $E(e)$ regroupant les équilibres de l'économie e . Notons que $E(e)$ est un sous-ensemble de S . Voir plutôt la figure 1 (nommée ainsi dans l'article de référence).

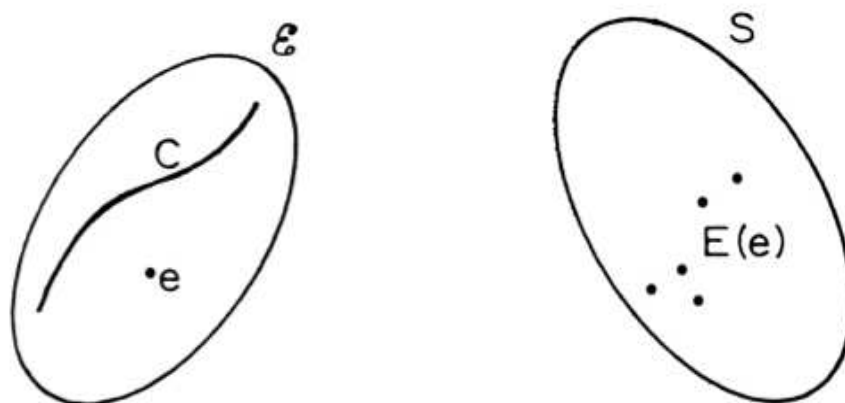


FIGURE 1

L'auteur distingue deux cas possibles. Soit l'équilibre est unique localement soit il ne l'est pas. Le premier cas est davantage souhaitable. Formellement, on dit qu'au voisinage de chaque équilibre x dans $E(e)$, il n'existe qu'un seul équilibre de e , c'est x lui-même. Seulement, même si les agents se comportent bien mathématiquement, il existe malgré tout la possibilité d'obtenir un ensemble $E(e)$ qui possède un nombre infini d'éléments, par conséquent d'équilibres. Pour appuyer l'importance de ce problème soulevé, Debreu développe un exemple d'une économie ouverte avec deux consommateurs et deux biens. De cet exemple ressort la preuve que l'on peut aisément déceler, dans la boîte d'Edgeworth associée à l'économie considérée, un ensemble $E(e)$ fait d'un continuum de point. Pour résoudre ce problème, la réponse de Debreu est intéressante ainsi que son *remède*. Selon lui, la situation pathologique provient de la manière dont les agents s'apparient, se mettent d'accord. A cet effet, la solution à cette impasse a lieu, d'une part dans

1. La traduction n'existe pas vraiment en français. On passe donc d'un problème de *uniqueness* à un problème de *finiteness*.

2.2. LA PREUVE DE L'UNICITÉ OU LE TOUR DE FORCE DE GÉRARD DEBREU

le recours à la topologie algébrique et d'autre part dans le concept d'*économies régulières* et les hypothèses les régissant. Ces dernières détiennent une dimension à la fois économique et mathématique, même si le dernier aspect apparaît comme plus prégnant. Aussi, il faut faire des hypothèses appropriées quant aux fonctions de demande découlant des propriétés des *économies régulières*², sinon il nous est impossible de nous servir de ce concept. Les fonctions de demande doivent être par conséquent *continuellement différentiable*. C'est grâce à la topologie algébrique (et indirectement à ces hypothèses sur les fonctions de demande) et au concept d'*économies régulières* que Debreu en finit avec l'insolvabilité de l'unicité.

A cela une dernière propriété est à respecter. Elle stipule qu'au voisinage d'une économie régulière, l'ensemble des équilibres dépend continuellement de l'économie. Formellement cela traduit l'idée suivante : si e' se situe proche de e , il serait souhaitable que $E(e')$ soit aussi proche de $E(e)$. En effet, si une petite erreur dans la détermination des caractéristiques de e (i.e. concernant la liste des fonctions de demande ou des dotations initiales des consommateurs) amène à un ensemble d'équilibres totalement différent de l'ensemble généré par l'économie initiale, la théorie perd de son pouvoir explicatif. Pour Debreu, les hypothèses fondamentales reposent toujours sur les fonctions de demande. Revenons désormais sur le passage d'unicité locale à un ensemble fini.

Le problème n'est plus tellement celui de l'unicité de l'équilibre mais plutôt celui de l'existence des *économies régulières*. C'est ici qu'intervient la première *astuce* de Debreu. Il connaît les hypothèses fortes nécessaires à la démonstration de l'unicité. C'est pourquoi, il développe dans un premier temps son étude *localement*. Afin de déterminer l'unicité locale d'un équilibre il va recourir à la compacité mathématique qui lui permet d'effectuer un glissement subtil, de changer la situation complexe de départ en celle relevant de la détermination d'un nombre fini d'équilibres locaux. En outre, notons que la compacité permet la transmission de certaines propriétés vérifiées dans un environnement local, à un niveau global. En d'autres termes, dès lors qu'une propriété est vérifiée au voisinage de chaque point

2. Notons que l'on dénombre deux propriétés des *économies régulières* que l'on peut résumer ainsi : a) un ensemble négligeable d'économies non régulières, b) chaque économie régulière a un ensemble fini d'équilibres.

de l'espace considéré, elle devient valable de manière uniforme sur tout le compact (i.e. un type d'espace topologique). Puis, après avoir prouvé la possibilité d'un tel glissement, l'auteur nous amène, à présent, à examiner les conditions dans lesquelles une économie obtient un ensemble fini d'équilibre et de prouver l'existence de cet ensemble fini. La démonstration de son théorème dépend des hypothèses sur la demande, révélées précédemment mais aussi, et surtout, d'une nouvelle condition qu'il introduit comme suit : la demande d'un bien augmente infiniment quand le prix de ce bien tend vers zéro. Cette hypothèse — nommée hypothèse de *désirabilité* — dispose d'une place beaucoup plus importante dans la démonstration que celle de la *différentiabilité*. Notons que ces deux hypothèses sont perçues comme indispensables puisque c'est sous ces hypothèses que l'ensemble des vecteurs des dotations initiales à une mesure de Lebesgue nulle, soit cet ensemble de vecteurs est négligeable³. Pour arriver à un tel résultat, i.e. de répondre à la question sur l'ensemble fini d'équilibre, Debreu exploite le théorème de Sard, qualifié par R. Thom comme l'un des trois théorèmes principaux en analyse mathématique. Formellement il s'écrit :

Une fonction f sur un ouvert U de \mathbb{R}^n à valeur dans \mathbb{R}^m

soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ et f de classe C^r (i.e. différentiable r fois)

Si $r > \max(0; n - m)$

Alors l'ensemble des valeurs critiques — i.e. les images des points critiques, points pour lesquels les dérivées s'annulent — a une mesure de Lebesgue nulle.

Apprécions le fait qu'il faut comme essentiel de construire une fonction (plus précisément une application différentielle) pour laquelle les valeurs critiques qui sont fournies par les vecteurs des dotations initiales, définit bien une économie e , à l'égard de laquelle, l'ensemble des équilibres $E(e)$ est infini. Cela rend applicable le théorème de Sard.

3. C'est que l'on nomme plus communément le théorème de Debreu.

2.2. LA PREUVE DE L'UNICITÉ OU LE TOUR DE FORCE DE GÉRARD DEBREU

Ce théorème aide donc à montrer que les économies *pathologiques* — caractérisées par des points critiques — sont négligeables (ont une mesure de Lebesgue nulle) par rapport à l'ensemble des *économies régulières* dans l'ensemble des états considérés. Intuitivement, cela revient à dire que la probabilité de traverser l'ensemble des états possibles de l'économie et de tomber sur une économie non régulière est nulle. L'évènement est quasi-impossible.

Debreu démontre une véritable ingéniosité dans l'approche de l'unicité. Ne trouvant de solutions sur les hypothèses à contenu économique, il se retranche sur l'outil mathématique usité. De nouveau il ne fait pas front à l'impossibilité de prouver l'unicité mais il déplace le problème subtilement. Seulement pour s'autoriser à le faire il faut qu'il détermine un nouveau concept économique justifiant sa démarche mathématique. L'argument avancé tel que les mathématiques précédemment utilisées n'étaient pas les bonnes, ne peut être suffisant. De ce fait, il détermine la notion d'*économie régulière*. La volonté de toujours s'inscrire dans un projet générique le pousse à poser des hypothèses très générales quant au comportement des agents, ne satisfaisant véritablement que la démonstration mathématique envisagée. La teneur économique, le réalisme des hypothèses retenues par Debreu peut nous laisser quelque peu sceptique. Arrow et Hahn abordent dans le chapitre 9 de leur ouvrage, *General Competitive Analysis* (1971), toutes les conditions à retenir pour la détermination de l'unicité, notamment les restrictions portant sur les fonctions de demande excédentaire. La plupart d'entre elles furent déjà évoquées par Wald. Comment peut-on alors prouver l'unicité si les conditions économiques ne sont autres que celles de Wald, qui ont prouvé leur caractère trop fort et restrictif? On y retrouve la subsituabilité brute des biens, la dominance diagonale ou encore la condition sur la matrice jacobienne de l'économie appréhendée. Bien que cette dernière se trouve non interprétable économiquement, elle fera couler beaucoup d'encre par la suite. Debreu ne fait pas le choix de trouver une nouvelle condition économique pour affirmer son projet. Il rejoint et se sert des arguments proposés par Arrow et Hahn, sur lesquels il se fonde directement, en citant leur

ouvrage notamment dans son principal article vulgarisant son approche de l'unicité, *Régular différentiable Economies* (1976). Dès lors toute sa démonstration va s'articuler autour des agencements mathématiques découlant de son concept d'*économies régulières*. Nous pouvons le situer comme sa première *astuce*. La seconde advient avec l'usage de la compacité. La transformation du problème, sa redéfinition par une équivalence mathématique mais non fondée économiquement, témoigne d'une grande habileté. Il amène indirectement à ne traiter le problème que formellement, démontrant par la même que l'appréhension économique serait trop complexe voire insolvable le cas échéant. Même s'il se limite à une analyse locale lorsqu'il se saisit de la compacité [1970], l'étendue de cet outil peut ramener le problème à une analyse globale de l'unicité. Le recours au théorème de Sard clôt avec rigueur l'impressionnante démonstration que vient d'accomplir Debreu. Nombres de prolongements portant sur l'unicité se fonderont sur ses travaux. Ils ne remettront pas en cause, les deux subtilités *techniques* de Debreu. C'est en cela qu'il effectue un unique et véritable tour de force. Au delà des virtuosités mathématiques, et de son concept d'*économies régulières* — qualifié d'économique ce qui nous apparaît comme hautement discutable — aucun de ses pairs ne revient profondément sur ces travaux.

Comme nous le verrons, les discussions s'appesantiront davantage sur des détails hautement techniques et mathématiques pour les plus courageux ou alors l'existence de l'unicité sera admise localement comme le prouve de nombreux titres d'articles aujourd'hui. Seulement selon nous, elle n'est pas prouvée empiriquement et le glissement opéré, aussi fin soit-il, ne nous apparaît pas comme suffisamment convaincant pour admettre que l'objet traité par Debreu est bien l'unicité de l'EG. Nous parlerons davantage d'unicité *à la Debreu* plutôt que d'unicité de l'EG, indiquant implicitement que la question de l'unicité et son traitement relève avant tout de la définition qu'on lui donne. Suivant ce point de vue, il y aura autant de preuves de l'unicité que de définitions associées. Nous ne partageons pas cette perception. L'unicité, dans le cadre de l'EG, ne se peut définir que d'une seule façon.

2.3 Prolongements et limites

Les prolongements témoignent indirectement, à leur manière, des limites de cette preuve. Debreu rédige *Regular Differentiable Economies* qu'en 1976. Seulement les principales remarques, celle de Nishimura mise à part, ont été publiées avant cette date charnière. Dès lors, sachant que Debreu eut connaissance de ces travaux critiques en 1976, les conditions que l'on va développer dès à présent sont intégrées par ce dernier dans son ultime article abordant l'unicité; c'est pourquoi nous soutenons la thèse qu'elles participent à la défaillance de la preuve, de ses limites.

La première particularité des critiques effectuées, est qu'elles portent presque toutes sur la Jacobienne; le premier article relève d'autres éléments sans y faire référence explicitement mais l'utilise malgré tout. Nous allons les présenter, faire émerger leurs propres arguments, souvent techniques avec une très faible dimension interprétable pour ensuite conclure généralement sur l'évolution discutable vers laquelle elles nous ont dirigés.

La seconde particularité et pas des moindres, est qu'elles portent toutes sur l'article de 1970 de Debreu, *Economies with a finite set of equilibria*. Aucune ne se réfère à celui de 1976 alors même que dans les ouvrages spécialisés tel que *The Invisible Hand*, il n'y a que ce dernier qui est présenté. Mais, rien d'anormal aux vues de ce qui y est développé, en l'occurrence la compacité, des fonctions de demande continues et différentiable, ou encore le recours au théorème de Sard. Même une ébauche du concept d'*économies régulières* y est présente.

Attelons maintenant à présenter les papiers évoqués.

Egbert Dierker publie le premier article en 1972, *Two remarks on the number of equilibria of an economy*. Suite à des discussions avec Debreu et Bewley, il s'engage dans deux démonstrations. En premier lieu, dans un cadre où presque toutes les économies sont dites *régulières*, i.e. où les fonctions de demande sont continues et différentiables, il démontre que le nombre d'équilibre dans ce type d'économies est étrange. Le résultat ne peut s'obtenir que via l'opération « modulo 2 », sauf si l'on ajoute de nouveau des hypothèses afin de donner à l'économie une structure complexifiée supplémentaire. En second lieu, toujours dans le même cadre, il

établit que tout équilibre dans une économie n'est pas localement stable en ce qui concerne un processus d'ajustement des prix continue et différentiable, à moins que l'équilibre de l'économie considérée soit unique.

Ensuite, advient le second papier écrit par H.R. Varian, s'intitulant *A third remark on the number of equilibria of an economy*, et publié en 1975. Il est le premier véritablement à engager le débat sur la Jacobienne. Son but est de faire connaître au plus grand nombre, de vulgariser pourrions-nous dire, un théorème qu'il juge intéressant, car fort riche pour l'exercice entrepris, utilisé qu'implicitement dans l'article de Dierker (1972).

Ce théorème stipule en somme que : si la matrice Jacobienne (les dérivées partielles) de la fonction d'offre excédentaire est positive pour tous les équilibres walrasiens, alors il y a exactement un équilibre.

Notons que la preuve de ce théorème est la même que celle du théorème 2 dans l'article de Dierker, excepté qu'ici le modèle et les hypothèses sont plus précisément formulés. Dans les conditions retenues, nous pouvons en déceler deux types : les conditions économiques et les conditions mathématiques.

Parmi celles du premier type, nous avons :

- une économie avec k biens.
- une fonction de demande excédentaire $z(p)$, continue et différentiable. Elle est définie sur un simplexe de prix S qui satisfait la loi de walras $p \cdot z(p) \equiv 0$.
- l'hypothèse de désirabilité pour tous les biens de l'économie, i.e. si le prix d'un bien devient nul, alors sa fonction de demande excédentaire deviendra strictement positive.

Puis parmi celles du second type nous avons :

- La matrice Jacobienne se définit comme : $-D(z(p))$.

Les conditions qui viennent d'être mises en avant se veulent clairement plus générales que celles avancées habituellement — comme la substituabilité brute, les conditions hicksiennes, la dominance diagonale. L'auteur utilise la condition de Pearce et Wise⁴(1973) ce qui allège la preuve en enlevant des hypothèses trop

4. Dans leur article, *On the uniqueness of the competitive equilibrium : Part I, Unbounded Demand*, ces deux auteurs affaiblissent les conditions permettant l'existence de la stabilité et de l'unicité de l'EG. Pour ce faire ils se réfèrent et utilisent des conditions bien connues que sont

2.3. PROLONGEMENTS ET LIMITES

fortes. Seulement elles sont plus mathématiques qu'économiques. La difficulté similaire émerge lors de l'utilisation de la Jacobienne même si deux sous-interprétations d'ordre économique, plus ou moins connues, sont souvent avancées. La première stipule que grâce à l'utilisation de l'équation de Slutsky, on peut écrire la Jacobienne comme la somme des matrices des effets de substitution, ces dernières définies positives, ainsi que des termes du revenu. D'où, si pour tous les équilibres les effets revenus (ER) sont petits alors il y aura qu'un équilibre. Or cela ne revient-il pas à se rapprocher de la dominance diagonale puisque lorsque les ER sont négligeables, alors seuls les effets de substitutions (ES) sont déterminants. De plus, pour des biens normaux, les ES sont plus importants pour une variation du prix du bien que l'on convoite directement plutôt que ceux provenant d'une variation d'un produit convoité par un agent tierce, qui ne nous concerne qu'indirectement. Ceci contribuerait donc à remettre en place des conditions trop strictes que l'on veut justement éviter. Une variante de cette condition consisterait à dire que si la Jacobienne indique une dominance diagonale avec de petits termes diagonaux, le théorème implique que sous réserve d'avoir un nombre pair de biens de Giffen pour tous les équilibres, alors l'équilibre est unique. Le problème reste cependant le même. On ne se passe pas de la dominance diagonale.

Ensuite, la seconde sous-interprétation annonce que même si ces ER sont grands, il existera toujours un unique équilibre si la propension marginale à consommer chaque bien ne varie pas avec les agents.

Enfin, la dernière remarque doit être attribuée à Nishimura. Il vient clore le colloque exigü qui s'était ouvert avec Dierker, avec la publication en 1978 de son

les deux versions de la substituabilité brute — forte et faible — ou encore la condition sur le déterminant de la Jacobienne. En outre, ils s'appuient sur une loi de Walras — $\sum_i q_i \cdot x_i = 0$ — légèrement modifiée, puisqu'ils exigent qu'aucun vecteur de prix n'existe tel que la quantité x_i soit strictement positive ou négative et ce pour tout i . Cette modification leur apparaît plus appropriée quand on se situe dans le cadre d'une économie monétaire.

Aussi leur condition s'établit d'après le *théorème 1* suivant : *L'équilibre compétitif d'un système Walrasien défini par les équations (1) $[(1) : x_i = x_i(q_1, \dots, q_n)$ avec $i = (1, \dots, n)$] est unique si la demande excédentaire de chaque marchandise est illimitée quand le prix de cette marchandise s'approche de zéro et si le déterminant de la Jacobienne contrainte, est défini et limité loin du zéro partout sur le domaine de tous les prix positifs satisfaisant une normalisation donnée $\sum q_i = a > 0$, où a est n'importe quelle constante donnée.*

article, *A further remark on the number of equilibria of an economy*. Citant directement les trois articles que l'on vient de décortiquer, son but est de mettre en évidence le fait que les résultats de Dierker sont indépendants de la propriété de monotonie des préférences. Afin de mener à bien son projet, l'auteur use d'une propriété, considérée comme équivalente à la première, mais s'exprimant en termes mathématique cette fois-ci, portant sur le champ vectoriel. Il va démontrer, de manière pratique, que l'exclusion d'*équilibres-limites*, situés sur les bornes du champ vectoriel étudié, est une condition suffisante pour obtenir un vecteur des prix unique. Pour ce faire, il va se servir de l'uniformité du signe du déterminant de la Jacobienne de l'ensemble contenant les vecteurs de prix d'équilibre. Nous sommes face, de nouveau, à une ingéniosité et à une aisance mathématique permettant l'apparition d'une nouvelle condition suffisante pour l'unicité. Mais cette condition ne génère aucun sens économique précis et concret. En somme, cela ne reste qu'un débat de virtuoses n'ayant aucune prise véritable sur l'application de la TEG. On se retrouve dans un élan quelque peu similaire à celui qui accompagnait la question de la stabilité dans les années 1970. Lorsque Quirk désire faire le point sur cette question, il arrive à une conclusion négative s'il en est, puisque si l'hypothèse de substituabilité brute sur la fonction de demande excédentaire n'est pas respectée alors il nous est impossible d'avoir une quelconque stabilité. Les hypothèses qualitatives sur les fonctions de demande excédentaire ne suffisent plus. Le théorème de Sonnenschein – Mantel – Debreu (1972) poursuit cette investigation et va encore plus loin en affirmant qu'on ne peut absolument rien dire sur la forme des fonctions de demande excédentaire. Dès lors le travail des économètres pour tester empiriquement la stabilité n'a plus lieu d'être étant donné qu'il repose sur des formes particulières de fonctions de demande. La perplexité des économètres à l'égard de ce papier n'y fait rien, il met en lumière l'écart flagrant entre l'investissement réalisé dans le modèle, ses attentes et ce qu'il est véritablement capable de produire et de démontrer. La situation pour l'unicité équivaut à celle de la stabilité, même si elle passionne moins de chercheurs.

Debreu ne consacra qu'une petite décennie de sa vie à l'étude de l'unicité. Un projet théorétique viable, clair et logiquement irréprochable mais qui démontre

2.3. PROLONGEMENTS ET LIMITES

certaines lacunes quant à son lien avec sa dimension empirique. Les réflexions proposées et produites dans les papiers s’associant à l’article de Debreu (1970), ne firent qu’empirer cet aspect là. A défaut de fournir une critique externe, invitant à un traitement du sujet aussi imposant et complet que ce l’a été pour l’existence, ces articles ont perpétué un point de vue technique et interne à la discussion. C’est d’ailleurs Debreu qui mit fin aux échanges sur l’unicité, en ce sens qu’aucun nouveau concept fondamental, venant bousculé ceux qu’il a instaurés, n’est avancé après. Son article de 1976 ne fait qu’éclaircir et résumer, avec la rigueur qui lui est attribué, les divers propos tenus, les diverses contributions essentiellement mathématiques et ses concepts, jamais inquiétés ni protestés.

Même si l’on connaît le projet initial de Debreu, dans lequel la pensée axiomatique moderne joue un rôle fondamental, rompant de plus en plus les liens avec une démarche positive, le fait est qu’il semble ne pas tenir en de nombreux points, aux vues de la dimension empirique indéniable de l’unicité. Cette dernière est un outil, un instrument économique permettant la comparaison entre deux équilibres atteint, tout du moins dans un cadre statique. L’approche de Debreu ne répond pas aux problèmes soulevés par Wald, qui ont une grande importance en terme de politique économique. C’est en cela que nous pensons qu’il faillit et que son coup de force n’est pas assez convaincant dans la perspective d’un traitement global et significatif de l’unicité. Si cette dernière est étudiée qu’empiriquement ou que théoriquement, les avancées dans l’une des deux sphères doivent servir à l’autre indéniablement. Les travaux de Debreu n’empruntent pas cette voie puisqu’ils reprennent les limites déjà soulignés par le passé, tout en accroissant l’écart entre la dimension interprétative et la dimension mathématique.

Nous allons donc voir dans la seconde partie comment peut s’articuler la dimension applicable de l’unicité, quels changements doit-on opérer pour utiliser ce riche outil à bon escient.

Deuxième partie

L'applicabilité de l'unicité de l'équilibre général

Dans cette partie, nous allons nous pencher sur la dimension applicable de l'unicité. Le but premier est de tenter de dépasser l'aspect quelque peu aporétique sur lequel nous sommes restés en fin de première partie. L'objet de cette partie tout d'abord est de savoir si le statut empirique de l'unicité est le même que le théorique. Si changement il y a, dans quelles mesures cela influe sur les recherches à mener et sur l'intérêt de la TEG. Est-ce toujours un projet viable ? De plus, l'empiricité de l'unicité semble rompre avec le caractère théorique que nous venons d'expliquer. Cependant de l'apparente révolution instaurée à l'avortement du projet il n'y qu'un pas. Nous verrons en quoi il est possible que ce dernier ait partiellement échoué malgré ce nouveau statut.

Chapitre 3

Le singulier statut de l'unicité

Si le statut théorique de l'unicité établi par Debreu, indique que nous sommes en présence d'un cas commun, i.e que la probabilité de traverser une économie dite *pathologique* — se caractérisant par un continuum d'équilibre — est quasi-nulle, son événement contraire — l'unicité de l'équilibre — étant donc quasi-certain, les études empiriques n'ont pas réussi à aboutir à la même conclusion. Celles notamment menées par Kehoe dans les années 1980, montrent un tout autre résultat. Pour quelles raisons ? lequel est-il désormais ? nous permet-il de sortir de l'aporie empirique dans laquelle nous avait projeté Debreu ?

Avant de définir le nouveau statut de l'unicité et de répondre à toutes ces questions, nous devons introduire ce que sont les modèles applicables de l'EG, leur fonction et leur utilité. Nous saisirons d'autant mieux, par la suite, les réponses apportées.

3.1 La place de l'unicité dans les modèles appliqués d'Equilibre Général

Un modèle appliqué d'EG est une représentation informatique d'une économie nationale ou d'un groupe d'économies nationales, chacune se composant de consommateurs, de producteurs et d'un éventuel gouvernement. L'analyse s'opère une fois la mise en oeuvre numérique de ces modèles, calibrés aux données, effec-

3.1. LA PLACE DE L'UNICITÉ DANS LES MODÈLES APPLIQUÉS D'EQUILIBRE GÉNÉRAL

tuée. De là, nous comprenons dans quelle mesure le modèle d'EG a été traditionnellement utilisé et pourquoi il l'est toujours de nos jours. En effet, ces modèles et leurs résultats rendent possible l'analyse des effets d'un changement de politique économique comme, par exemple, le changement de régime d'imposition ou le changement dans le quotas sur les biens importés. Ils mettent en avant l'un des principaux avantages du modèle d'EG : « sa capacité à tracer les conséquences d'importants changements dans un secteur particulier partout dans l'économie » (H. Scarf and J.B. Shoven, 1984, p.xi).

Suite aux expériences conduites, le but *in fine* de l'analyse se caractérise dans le fait que le chercheur puisse donner des réponses quantitatives à des questions clairement posées. Certaines peuvent impliquer l'utilisation de la théorie — « quels sont les effets sur le bien-être d'un changement de politique ? (Kehoe, [1995]) » — alors que d'autres font plutôt appel à l'utilisation des tests de la théorie — « est-ce que les résultats générés par un modèle économique sont cohérents avec les observations ? » (*Ibid*). En somme, selon la question posée, le modèle érigé sera spécifique et singulier. Il n'y a pas un modèle à pourvoir qui pourrait tout expliquer. « L'équilibre général appliqué est un ensemble de principes pour faire de la recherche en économie, non un modèle en particulier » (*Ibid*). Le modèle appliqué d'EG revêt, en outre, l'habit d'un critère négatif, engendrant l'augmentation des connaissances. Nous entendons par l'intermédiaire de cette image, que la place de l'échec dans les expérimentations, est importante. Elle contribue, dans certains cas, à accroître encore plus le succès d'autres modèles en soulevant les erreurs à ne pas itérer. « Une incohérence brute entre les résultats et les observations du monde crée un paradoxe qui ne peut être résolu seulement par de nouveaux développements dans la théorie étant à la base du modèle » (*Ibid*). Les modèles appliqués d'EG font ainsi preuve de flexibilité, tout en développant une capacité à aborder une vaste gamme de questions, liée aux politiques suivies. Ces modèles connaissent cependant des limites, qui sont assez similaires à celles adressées aux modèles théoriques. La plus importante évoque le défaut dont font preuves les modèles dans la retranscription de la réalité. Elle apparaît comme pas assez satisfaisante. Scarf et Shoven [1984] fournissent et détaillent des exemples probants. Toutefois, ils tiennent à souligner

que ces modèles présentent une méthode d'analyse forte intéressante et restera utile tant que la théorie économique sera capable de fournir des formulations alternatives incontestables.

Les premiers travaux importants sont écrits par Habegger (1962) et Johansen (1960). Ils sont les premiers à produire des applications numériques de l'EG. Il est à noter qu'ils se sont fortement inspirés du travail de Léontief, avec sa célèbre analyse input-output. Le véritable tournant a lieu avec les travaux de Scarf, ayant pour objet le calcul des équilibres économiques (1967, 1973). Il créa un algorithme afin de calculer un modèle d'EG multisectoriel. Cet algorithme fut tellement important qu'il connut et connaît, encore de nos jours, des améliorations afin de l'utiliser. Jusqu'au milieu des années 1980 et la naissance des travaux proposés par Kehoe, très peu voire aucun modèle appliqué n'avait abordé véritablement la question de l'unicité. Pourquoi si tard ? la réponse apparaît somme toute assez banale aux vues de l'histoire du développement qu'a connu le triptyque. Les faits laissent à penser que le traitement empirique subit le retard qu'a pris le traitement théorique. Pourtant l'unicité détient de forts arguments pour prétendre à une place centrale dans les études empiriques de l'EG.

L'unicité, dans la *praxis*, rend faisable la comparaison entre deux équilibres. Si l'on se trouve dans une situation où la multiplicité des équilibres fait loi que ce soit avant ou après l'apparition d'un *choc exogène* alors on doit faire face à un élément d'indétermination, pouvant fausser ou même rendre impossible les comparaisons entre équilibres. Le fait d'être en présence, avant et après un choc, d'un équilibre unique simplifie et aide grandement à l'étude des politiques à menées. Si l'on passe d'une situation unique à une multitude d'équilibre comment savoir si c'est le choc qui en est la cause ou si ce n'est pas l'évolution intrinsèque de l'économie qui a conduit à un tel résultat. L'impact du changement provoqué par le choc devient ambigu. L'unicité se révèle être un outil très utile dans l'applicabilité des modèles et leurs portées. Cette comparaison des équilibres est l'objet de la statique comparative. Elle étudie justement les effets générés par les chocs exogènes sur les équilibres. Ces chocs peuvent prendre la forme d'une modification des goûts des agents, d'un afflux soudain de population ou encore d'un changement dans les al-

3.1. LA PLACE DE L'UNICITÉ DANS LES MODÈLES APPLIQUÉS D'EQUILIBRE GÉNÉRAL

locations initiales des agents. Le destin de l'unicité et de la statique comparative sont, par conséquent, considérablement noués. Si l'unicité est admise et prouvée alors la statique comparative gagne en pouvoir explicatif. Si l'unicité ne suffit pas à elle seule à faire de la statique comparative un outil précieux, elle y contribue sans équivoque. Le cas contraire serait incontestablement un coup dur jouant en la défaveur de la statique comparative.

Prouver l'unicité advient comme la quête primordiale. Nous avons évoqué lors de la partie I, les hypothèses permettant de la démontrer. La plus usitée dans le cadre d'une économie d'échange, puisqu'assurément la plus viable — à laquelle nous pouvons prêter une interprétation économique non négligeable — est la substituabilité brute. Seulement nul n'est sensé ignorer que Wald déplora déjà son aspect trop restrictif. Quand bien même elle détiendrait un contenu économique intéressant, il n'en reste pas moins vrai qu'elle se vérifie peu dans les faits ; tout du moins, un contre-exemple simple pourrait démontrer que la substituabilité brute (SB) ne tient pas. Reprenons l'exemple proposé par Scarf [1960] dans lequel cette hypothèse est aisément violée.

Nous sommes en présence d'une économie d'échange (absence de production). Nous trouvons dans cette économie trois biens ainsi que trois consommateurs. Les fonctions d'utilité et les dotations initiales sont définies comme suit :

1. $U_1(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_1, x_2\}$, $e_1 = (r_1, 0, 0)$
2. $U_2(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_2, x_3\}$, $e_2 = (0, r_2, 0)$
3. $U_3(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_3, x_1\}$, $e_3 = (0, 0, r_3)$

Chaque consommateur fait face à des biens complémentaires.

Rappelons la définition de la SB et ses implications. La substituabilité brute stipule que lorsque le prix du bien 2 augmente, les consommateurs vont substituer le bien 1 au bien 2. La demande excédentaire du bien 1 va, par conséquent, s'accroître.

Or dans ce cas précis, quand p_2 augmente, le consommateur 1 va demander moins d'unités des deux biens (bien 1 et bien 2), puisqu'ils sont parfaitement complé-

mentaires. Le consommateur 2 est plus riche lorsque p_2 croît. Cependant il ne consomme pas de bien 1. Enfin dans tous les cas, le consommateur 3, quant à lui, n'est pas directement affecté par une quelconque augmentation de p_2 .

Ainsi, il n'y a que l'agent 1 qui est directement concerné par une augmentation de p_2 . Seulement comme nous l'avons annoncé plus haut, les deux biens sont de parfaits complémentaires ; d'où il n'existe pas d'effet de substitution. L'effet de revenu négatif domine l'effet de substitution non-négatif. Ainsi la SB ne tient pas. Notons deux choses. Pour Scarf, il ne s'agit pas uniquement de savoir si la SB tient ou non mais aussi de savoir ce dont elle dépend. Elle n'est pas définie seulement par les préférences des agents. La manière dont sont réparties les dotations initiales totales de chaque bien parmi les consommateurs est la question sous – jacente soulevée par le problème de la SB. Ensuite, cet exemple est initialement développé afin de démontrer que le stabilité de l'EG n'est pas vérifiée de manière générique. Cette propriété sert à la fois dans la preuve de l'unicité et de la stabilité de l'EG. Il est en de même pour la dominance diagonale — très proche de la substituabilité brute.

Cet exemple appliqué démontre bien la dissension entre le statut théorique de l'unicité et son statut empirique. Le problème proviendrait du fait qu'en économie il n'est pas possible de déterminer les caractéristiques des agents avec une bonne précision. Les goûts et les possibilités techniques sont souvent les mêmes pour tous les individus. Ils ne varient très peu, alors que dans les faits, ces deux caractéristiques varient d'un agent à l'autre. Cela oblige les économistes à se limiter à des hypothèses *qualitatives*, portant sur les relations de préférences ou sur les ensembles de production, qui ne conviennent que très peu pour atteindre des objectifs même *quantitatifs*. Le théorème de Sonnenschein n'explique que cela. Selon B.Guerrien [1989], que les hypothèses de SB ou de dominance diagonale ne soient pas fondées microéconomiquement, i.e. en faisant appel à des comportements maximisateurs, ne relève pas de la vraie discussion. Cette dernière s'articule autour de la question de la forme des demandes nettes. De ce fait l'une des conséquences immédiates du théorème de Sonnenschein est que, contrairement à ce qu'à démontrer théoriquement Debreu, l'unicité de l'EG ne peut être vérifiée que dans certains cas, très

particuliers. Kehoe souligne cette particularité quelques années avant Guerrien. Il va s'échiner à prouver que l'unicité est une propriété vraiment désirable pour un modèle économique ; qu'il faut l'entretenir, la chercher et essayer de la vérifier, dans le plus grand nombres de cas possibles. Il se rend compte que son statut change, que les cas sont rares. Nous allons donc étudier l'émergence de ce nouveau statut. Comment arrive-t-il, quelle est la méthode employée par Kehoe pour arriver à une telle conclusion et quelle en est sa portée.

3.2 Un nouveau statut pour l'unicité...

Dans cette section, nous allons essentiellement présenter et détailler un papier de T.Kehoe ([1985b]), nous amenant à mettre en lumière le nouveau statut de l'unicité. Le choix de cet article n'est pas arbitraire. Il apparait, à l'instar de l'article de Debreu [1976], comme le point de rupture avec la vision théorique de l'unicité. Ce qui a retenu avant tout notre attention, c'est la méthodologie de l'auteur. Nous allons donc retracer tout le processus d'argumentation de l'auteur pour mieux saisir de quelle manière il parvient à ce nouveau statut — fondateur d'une nouvelle perspective et de nouveaux travaux en économie.

T. Kehoe va étudier dans cet article les hypothèses à émettre, dans le cadre d'une économie de production, pour que l'équilibre soit unique. Pour ce faire, l'auteur développe un argumentaire rigoureux, qui résume, critique et dépasse les conditions précautionneusement établies auparavant et acceptées depuis lors. L'article s'articule autour de deux thèmes. Le premier est d'ordre interprétatif et qualitatif. Le second est davantage technique pour obtenir des résultats quantitatifs.

Comme nous l'avons évoqué plus haut, afin d'aborder l'unicité, il est indispensable de revenir à ce qui la détermine : les hypothèses retenues. Ces dernières permettront d'autant mieux ensuite, la mise en place d'exercices d'applications des modèles dans le cadre de la statique comparative. Aussi, il s'enquiert des hypothèses à retenir pour une économie de production. Il indique la présence de deux types d'hypothèses : des hypothèses à contenu purement mathématique et des hy-

pothèses à contenu économique. Il reprend les conditions détaillées et instaurées par Arrow et Hahn [1971], survenant sur les fonctions de demande excédentaires. Ces conditions, qualifiées de *suffisantes* pour prouver l'existence de l'unicité d'un équilibre, sont au nombre de quatre. Rappelons-le brièvement :

1. la substituabilité brute
2. la version faible de la substituabilité brute, i.e. formellement nous obtenons : soit deux biens i, j avec $i \neq j$ tel qu'à un prix p , nous n'avons plus $S_{ij}(p) < 0$ quand $S(p)$ est définie mais $S_{ij}(p) \leq 0$, quand $S(p)$ est définie.
3. la dominance diagonale
4. Condition sur la Jacobienne de l'économie considérée.

Kehoe remarque deux défauts à ces conditions. Elles définissent des conditions *suffisantes* et non des conditions *nécessaires*, détenant des significations économiques certaines. Les hypothèses mathématiques ne suffisent pas uniquement à garantir l'unicité. Il faut, selon l'auteur, introduire des considérations d'ordre historique, comme celles portant sur la stabilité dynamique, ce qui complique grandement l'étude. En outre, Arrow et Hahn ne s'attardent que sur l'étude d'une économie d'échange ; aucune extension ou ébauche d'étude sur l'économie de production n'est proposée. C'est pourquoi, dans ce papier va être développé un théorème d'indice topologique (« *topological index theorem* ») dans le but d'obtenir des conditions *nécessaires* et *suffisantes* pour l'unicité de l'équilibre dans des économies de production. Il s'appuya sur le théorème de l'indice topologique de Dierker [1972] pour une économie d'échange, ainsi que sur les travaux de Varian [1974] et de son extension aux économies de production avec les travaux de Mas-colell (1978), pour développer son propre indice, qu'il publie en [1980]. Dans ce papier, il indique qu'il utilise une fonction à valeur unique et continue, dont les points fixes sont équivalents à l'équilibre du modèle. Les résultats obtenus sont sans appel. Les conditions requises pour l'unicité de l'équilibre pour des économies de production sont, à leur tour, trop restrictives, comme celles établies pour les économies d'échange. Pour savoir comment il est arriver à ces résultats, étudions sa démarche.

3.2. UN NOUVEAU STATUT POUR L'UNICITÉ...

Dans un premier temps, il reprend le cadre du consommateur ; il n'émet pas immédiatement de critiques. Ce dernier se sert du concept d'*économie régulière* de Debreu, ainsi que des hypothèses qu'il a posées, tel que l'aspect continuellement différentiable des fonctions de demande. Il se réfère même aux remarques effectuées par Varian, leur accordant le crédit de la vérité puisqu'il évoque clairement que le nombre d'équilibre est fini en quantité et étrange. Enfin il prend note des travaux de Nikaido et Gale (1965, « The Jacobian Matrix and Global Univalence of Mappings »), proposant les conditions les plus générales pour déterminer l'unicité de l'équilibre. L'une d'elles stipule que si l'axiome faible des préférences révélées est satisfait ou si la SB est satisfaite pour les fonctions de demande excédentaire du consommateurs, alors l'équilibre est unique. Aussi, la première partie de son entreprise est de se servir de ce cadre jugé valide, pour afficher sa généralisation du *théorème d'univalence globale*, qu'il nomme simplement *théorème de l'indice topologique*. Sa volonté est de créer un théorème ayant la plus grande portée possible — pouvant calculer l'unicité à la fois dans un cadre d'économie d'échange comme dans celui d'une économie de production — jamais créé jusqu'alors. Il recourt à des exemples pour le prouver. Le changement de statut commence à s'effectuer à cet endroit. Certes cela nourrit la seconde partie de son entreprise et fournit des conditions *nécessaires* et *suffisantes* pour la détermination du nombre d'équilibre, mais il va contribuer à déconstruire les généralités théoriques, étrangement non-débattues.

Il opère minutieusement en donnant des exemples pour chaque hypothèse retenue. Il commence par la substituabilité brute. Utilisant la vision commune, il indique que son algorithme prouvera l'unicité de l'équilibre pour une économie d'échange de manière quasiment triviale. Ensuite il se tourne du côté d'une économie de production. Dans ce contexte, la SB ne joue pas le même rôle que dans une économie d'échange. Il se trouve qu'en présence de ce type d'économie, il faut ajouter d'autres hypothèses à la SB, encore plus restrictives, pour pouvoir déterminer correctement l'unicité de l'EG. En outre, même si la technologie de production est arbitraire, la SB n'assure de façon ni *satisfaisante* ni *nécessaire*, l'unicité de l'équilibre, alors que l'axiome faible des préférences révélées se révèle être une hypothèse

remplissant ces deux critères. Enfin, le changement de statut s'opère véritablement lorsqu'il propose un contre-exemple concernant l'unicité de l'EG dans une économie d'échange. Sa *stratégie*, si nous pouvons nous exprimer ainsi, rappelle celle initiée par Scarf, en débutant par alimenter le débat de contre-preuves. Il ne s'agit pas seulement de proposer un nouveau statut dans un nouveau cadre mais plutôt de démolir minutieusement le statut communément accepté, dans tous les cadres, surtout celui dans lequel il n'a jamais été contredit. Pour ce faire il élabore un cas spécifique qu'il résume dans le théorème 3, s'énonçant comme suit :

Supposons l'économie (ξ, A) telle que ξ expose une substituabilité brute. (ξ, A) a un unique équilibre si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. $A = -I$; i.e, (ξ, A) est une économie d'échange
2. $n \leq 3$

avec ξ = la fonction de demande excédentaires agrégé, correspondant à la somme des demandes excédentaires individuelles. Cette demande excédentaire agrégée doit respecter, à son tour, les propriétés suivantes :

- elle est continue tant que les prix sont strictement positifs
- elle admet une borne inférieure (autrement dit, elle est limitée par le bas) qui est l'opposé du vecteur des dotations initiales agrégées $-w$
- elle est homogène de degré 0 (elle ne subit pas l'illusion monétaire)
- elle satisfait le loi de Walras

et avec A = matrice d'analyse de l'activité. Chaque colonne de A représente soit une activité, soit un processus technologique connu qui transforme un facteur de production (input), provenant du vecteur des dotations initiales agrégées soit un processus technologique qui transforme un produit (output) d'une certaine activité en un autre produit.

A travers ce théorème, l'exemple de Kehoe prouve que la SB n'est pas une condition nécessaire et suffisante, même dans le cadre d'une économie d'échange pour mener à l'unicité de l'équilibre. Il faut absolument qu'elle respecte les deux conditions

3.2. UN NOUVEAU STATUT POUR L'UNICITÉ...

supplémentaires. La SB tient toujours pour une économie d'échange constituée de moins de 4 marchandises. Au delà, il est possible de trouver des exemples empiriques indiquant une multiplicité d'équilibre. Il va opérer de la même manière avec l'axiome faible des préférences révélées. Il va aboutir à la même conclusion :

Si ξ satisfait l'axiome faible des préférences révélées,
Alors (ξ, A) n'a pas un unique équilibre.

Notons que pour une économie d'échange, dès lors que les consommateurs sont hétérogènes, l'axiome faible ne tient plus. Il joue un rôle prépondérant dans la démonstration de l'unicité seulement dans certains cas. En effet si toutes les fonctions d'utilités sont identiques (Gorman¹), ou si toutes les dotations initiales sont proportionnelles (Chipman²), alors la fonction de demande excédentaire se comporte comme celle d'un simple consommateur ; de plus, si la fonction de demande excédentaire ξ est telle qu'elle peut être obtenue par la maximisation de l'utilité d'un seul consommateur alors l'équilibre qui s'en suit est unique. Wald (1951) fut le premier à trouver ce résultat. Kehoe l'a retrouvé avec son *théorème de l'indice*. Avec les contre-exemples employés et les limites mises en lumière, Kehoe souligne le fait que de chercher des conditions *suffisantes* seulement du côté de la demande, tend à développer une hypothèse jugée trop excessive, sur l'unique consommateur fictif appréhendé. Elle se résume dans la version forte de l'axiome des préférences révélées. Ce renforcement ne doit pas sembler si surprenant, même si la version faible semblait déjà suffisante et quelque peu restrictive. Se cache derrière ce changement l'habituelle volonté de généralisation. Rappelons que lorsque ξ satisfait l'axiome faible alors (ξ, A) est presque toujours une économie régulière. Il devient *suffisant* et *nécessaire* pour l'unicité quand l'analyse de la technologie d'analyse d'activité est arbitraire. Lever cette dimension arbitraire revient à rigidifier l'axiome des préférences révélées. Le problème de cette condition extrême tient dans la difficile interprétation économique que l'on peut en faire. Bien que la

1. Gorman, W. M., « Community Preference Fields », *Econometrica*, XXI (1953), 63-80.

2. Chipman, J. S., « Homothetic Preferences and Aggregation », *Journal of Economic Theory*, VIII (1974), 26-38.

fonction de demande excédentaire soit le résultat d'une maximisation d'une fonction d'utilité quasi-concave, sous-contrainte d'un ensemble budgétaire non-vide — ce qui satisfait l'axiome faible — cette propriété n'est pas préservé lors du passage à l'agrégation.

Kehoe démontre bien qu'avec le recours à la version forte, il semble que l'on gagne en généralité mais on perd nettement en interprétation. Puis le passage de l'individuel au collectif est bancal. Par conséquent, si les conditions sur la demande ne sont que peu manipulables et hautement restrictives afin d'obtenir l'unicité, l'auteur propose de se concentrer sur un autre versant de l'économie : la production. Or comme nous l'avons vu précédemment, les hypothèses jugées comme performantes, même si réductrices et limitées, du côté du consommateur détiennent encore moins de pouvoir explicatif et démonstratif du côté du producteur. De plus il n'y a aucune condition valable sur A — la matrice d'analyse de l'activité — telle que (ξ, A) a un unique équilibre, si les seules restrictions présentes sur ξ sont la différentiabilité, l'homogénéité et la loi de Walras. Fort de ce constat et de cette impasse, l'auteur propose une nouvelle analyse combinant à la fois les conditions du côté du consommateur et du producteur.

La démonstration de l'unicité nécessite donc un nouveau cadre : une économie input-output. On dénombre quatre conditions pour s'assurer de l'existence d'une telle économie :

1. un seul bien non-produit,
2. une demande excédentaire strictement positive, ce à n'importe quel équilibre et pour les $(n - 1)$ biens considérés, produits par tous les consommateurs.
3. absence de production jointe (externalités en somme)
4. existence d'un certain vecteur de niveaux d'activité non-négatifs y tel que
$$\sum_{j=1}^m a_{ij}y_j > 0, i = 1, \dots, (n - 1)$$

Pour que la seconde condition soit assurée, l'une des manières de procéder, proposée par l'auteur, est de permettre les dotations initiales seulement sur le bien non produit, traditionnellement le travail. On oriente ainsi les dotations initiales. Ce

3.2. UN NOUVEAU STATUT POUR L'UNICITÉ...

recours apparait quelque peu arbitraire néanmoins jugé convenable pour déterminer l'unicité de l'équilibre.

Une fois ces conditions respectées et l'existence d'une économie input-output assurée, l'auteur prouve l'unicité de l'équilibre d'une telle économie via son théorème 7³.

Ce théorème, nommé le théorème de non-substitution, implique que l'unicité de l'équilibre est déterminée indépendamment de ξ . C'est une conclusion importante, qu'avait manqué le théorème de l'indice. Ce résultat permet à l'auteur d'étendre l'étude de l'applicabilité de l'unicité de l'EG aux économies se caractérisant par des technologies de production très générales. En témoigne la proposition d'extension des calculs, via des exemples, à des technologies de production ayant la particularité d'avoir des fonctions de profit lisses. En résumé, l'auteur partant d'une situation apparemment conquise du côté de la demande, essaye d'obtenir mais en vain les mêmes résultats du côté de la production. De là, il fait une pierre deux coups : la généralisation de la non-unicité du côté de la production et la présentation d'exemples probants invitant à re-considérer l'unicité même du côté de la demande. Il justifie sa démarche par deux manquements très importants de ses pairs dans l'approche de l'unicité de l'EG. D'une part l'intérêt démesuré pour les conditions suffisantes, délaissant les conditions nécessaires, fondamentales dès lors qu'on s'inscrit dans un projet applicable de la TEG. D'autre part l'attention donnée aux modèles concernant les économies d'échange empêche de se procurer une vision d'ensemble, indispensable dans le traitement de l'unicité. A ces deux manquements, ils donnent deux réponses, l'une à caractère mathématique — le théorème de l'indice pour une dimension applicable générant une performance plus générale, l'autre à caractère économique, s'évertuant à traduire du mieux possible des conditions mathématiques. Seulement, après ce riche travail, il s'est avéré que beaucoup des hypothèses perdent de leur nécessité. L'auteur en tire des résultats négatifs puissants. Tout d'abord, aucune condition qui porte sur le côté de la de-

3. ce dernier s'écrit comme suit :

« On suppose que (ξ, A) est une économie input-output et qu'aucune colonne de A ne peut être exprimée autrement que par une combinaison des n autres colonnes.

Alors (ξ, A) est une économie régulière et a un unique équilibre ».

mande, n'impliquant pas l'axiome faible des préférences révélées, n'est suffisante pour l'unicité. Ensuite, aucune condition portant sur le côté de la production, sauf la réversibilité complète de la production⁴ n'est suffisante pour l'unicité. L'ultime conclusion, qui découle de toutes ces conditions et conclusions intervient, revient au statut de l'unicité. Il s'avère évident pour l'auteur, aux vues des calculs effectués, des hypothèses retenues toujours plus nombreuses et toujours moins interprétables, que la non-unicité n'est pas une situation si *pathologique* que cela. Elle apparaît même comme une situation davantage commune dans les modèles appliqués d'EG. Ce nouveau statut n'est pas sans conséquences. Il change la perception que l'on a de l'unicité mais aussi son calcul. Si la non-unicité semble beaucoup plus répandue que l'unicité, cela ne signifie pas que cette dernière n'existe pas. Elle est simplement rare. Rare ici, est à comprendre comme peu commun, non forcément comme peu nombreux. On peut dénombrer un certain nombre de cas peu commun. Tout le travail désormais est de rechercher ces cas rares, de les expliciter pour voir s'ils sont souhaitables, atteignables et comment tendre vers eux.

3.3 ...pour des résultats intéressants mais peu nombreux.

Un regain d'intérêt pour l'unicité voit le jour au milieu des années 1980. Des travaux tels que ceux de Kehoe (1980⁵, 1985a⁶) y ont fortement contribué, en procurant des théorèmes de l'indice avec des formules explicites pour calculer justement l'indice d'un équilibre. Si ces premiers algorithmes se sont cantonnés à des cadres assez spécifiques telles que des économies avec des impôts et de la production, Kehoe ne tarda pas à pourvoir la recherche d'un outil performant pour tous les cadres étudiés, comme nous l'avons spécifié dans la section précédente. Dans

4. Cela consiste à recouvrer de nouveau chaque input utilisé dans le processus de production. En somme, nous opérons un processus inverse, de *déproduction*. Partant de l'output, on doit pouvoir recréer les inputs. Cette condition est hautement irréaliste.

5. T. Kehoe, « An Index Theorem for General Equilibrium Models with Production », *Econometrica*, 48 (1980), 1211–32.

6. Kehoe, « The Comparative Statics Properties of Tax Models », *Canadian Journal of Economics*, 18 (1985a), 314–34.

3.3. ...POUR DES RÉSULTATS INTÉRESSANTS MAIS PEU NOMBREUX.

cette section, il s'agit maintenant de se pencher sur la teneur des résultats numériques et d'en tirer des conclusions quant au nouveau statut de l'unicité et son étendue.

Kehoe et Whalley [1985c] se sont attelés à prouver empiriquement via des travaux numériques, l'existence de l'unicité de l'équilibre général. En effet, ils décident d'écrire un rapport sur des calculs faits d'après un modèle d'équilibre général présentés par Fullerton, King, Shoven et Whalley (1981) afin de montrer que l'équilibre général de cette économie est clairement unique. Ce modèle met en équations l'économie nord américaine ainsi que son système fiscal. Seulement cette note se présente comme un prétexte pour lever une difficulté de plus grande ampleur ; le fait qu'il est presque impossible d'établir l'unicité d'un EG pour des modèles de grande dimension puisque jusqu'à la rédaction de cet article, aucun algorithme n'était capable de trouver tous les équilibres d'un modèle. D'où le véritable projet poursuit dans ce papier, depuis la proposition de ce nouveau statut, réside dans la capacité des auteurs à trouver un algorithme apte, efficace et applicable à tous les modèles d'EG proposés. De plus si l'unicité est prouvée, alors il livrera des hypothèses *nécessaires* et *suffisantes*, prêtes à être étudiées et interprétées. Déployons de manière concise le modèle et son extension pour mieux se pencher sur les résultats et leurs portées.

Le modèle fiscal de Fullerton–King–Shoven–Whalley est un modèle d'équilibre général dynamique et séquentiel de l'économie américaine. Le système fiscal retenu dans le modèle, incorpore les distorsions les plus importantes ayant lieu sur les marchés des biens et des facteurs de production. Pour chaque période, on dénombre dix-neuf producteurs de biens qui utilisent du travail et du capital dans des fonctions de production à valeur ajoutée de type CES. Ils utilisent les biens manufacturés d'autres industries via une matrice d'input-output à coefficients fixes. Ensuite on dénombre une douzaine de groupes de consommateurs différenciés par la classe de revenu, chacun étant doté initialement à la fois de capital et de travail. Les consommateurs maximisent leurs utilités selon quinze biens de consommation courante, loisirs actuels et sur une consommation future anticipée. La structure essentielle de ce modèle évolue dans un plan à trois dimensions d'un simplexe se

projetant dans lui-même pour chaque équilibre d'une période. En d'autres termes, les trois dimensions impliquent les demandes excédentaires du capital, du travail et le déséquilibre budgétaire gouvernemental. Le système correspondant s'écrit :

$$\begin{cases} \xi_L(w, r, R) - \bar{L} = 0, \\ \xi_K(w, r, R) - \bar{K} = 0, \\ R - T(w, r, R) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où ξ_L et ξ_K sont les dérivées des fonctions de demande du capital et du travail, qui correspondent aux prix des facteurs w et r comme le stipule la TEG microéconomique standard. R est le niveau des dépenses du gouvernement et T les recettes générées par les impôts pour n'importe quel (w, r, R) . Après quelques manipulations pour éliminer R du système précédent, dans le but de le simplifier, ils définissent un nouveau système, le dernier, qu'ils vont pouvoir évaluer directement. Ce nouveau système s'énonce de la manière suivante :

$$\begin{cases} \xi_L(w, r, R(w, r)) - \bar{L} = 0, \\ \xi_K(w, r, R(w, r)) - \bar{K} = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Les résultats du graphique correspondant aux calculs est extrêmement clair. La figure 1 indique l'unicité des équilibres par le seul point d'intersection entre les deux fonctions de demande excédentaire et l'axe des abscisses. Les auteurs ne se sont pas arrêtés à un cas, puisqu'ils ont aussi confirmé l'unicité pour d'autres spécifications du modèle dans lesquelles les élasticités des fonctions de production ont été changées, et ce dans toutes les industries. Enfin, les auteurs ajoutent que ce qui est à retenir avant tout n'est pas seulement l'unicité de l'équilibre dans le cas standard mais plutôt que l'unicité tient toujours et ce après n'importe quel changement dans les paramètres lors d'un exercice de statique comparative. Il est donc raisonnable de croire, selon eux, que seul un changement radical dans les paramètres peut provoquer l'apparition de la non-unicité. Voici pour le cas classique. Les applications aux modèles à plus grandes dimensions vont connaître des succès plus mitigés.

3.3. ...POUR DES RÉSULTATS INTÉRESSANTS MAIS PEU NOMBREUX.

La seconde étude menée dans ce rapport concerne un modèle de l'économie mexicaine présenté par Kehoe et Serra-Puche. Ce dernier est quasi-similaire au précédent, sauf qu'il y a désormais trois facteurs de production et non deux : le travail urbain, le travail rural et le capital. On compte ainsi trois prix relatifs pour les biens et non deux. En recourant à la même méthodologie que précédemment, ils vont réussir à démontrer l'unicité de l'équilibre (puisque cela leur laisse toujours un simplexe de trois prix de facteurs de productions et un ensemble à deux dimensions pour chercher les équilibres comme dans l'exemple traité ci-avant). Seulement, même si une recherche sur un simplexe impliquant quatre prix serait faisable mais coûteuse, une recherche sur un simplexe impliquant cinq prix développerait un coût exorbitant en terme de temps.

D'où, l'un des principaux problèmes d'une recherche complète dans un cadre pluridimensionnel est qu'il n'est pas facile d'identifier les points d'intersection entre les fonctions de demande excédentaires diverses et l'axe des abscisses (i.e. les « zéros des fonctions de demande »). En dimension un, si la fonction change de signe sur un petit intervalle, alors la continuité implique que la fonction doit s'annuler quelque part sur l'intervalle. En présence de dimension plus grande, il n'y a pas de résultats analogues. En conséquence, une meilleure grille de recherche est exigée pour permettre une approximation raisonnable d'un équilibre. Malheureusement, pour une taille de grille fixe, le nombre de points monte exponentiellement avec la dimension du problème. Ils fournissent un exemple numérique qui démontre que lorsque les prix sont augmentés arbitrairement de $1/30^e$, nous devons chercher les résultats sur une grille contenant 406 points, soit 29 de plus que celle correspondant à une recherche uni-dimensionnelle.

Ainsi, la technique de restriction proposée lors de la première étude n'est plus appropriée pour des modèles avec plusieurs facteurs de production, spécifiquement ceux comprenant du capital par exemple. L'unicité est donc prouvée seulement dans certains cas, marginaux, peu communs.

Seulement, n'est-ce dû qu'à un problème d'algorithme ou peut-on expliquer cette rareté d'après d'autres arguments plus économiques ? dès lors qu'advient-il de la rareté ?

Nous allons voir que cela peut aussi s'expliquer, encore une fois, d'après le caractère trop restrictifs des hypothèses retenues (Kehoe, [1992]). On passe de résultats peu communs à des résultats très peu nombreux. La rareté prend, dès à présent, plusieurs sens.

Il apparaît presque inutile de rappeler le rôle ambigu que joue la substituabilité brute dans la preuve de l'unicité selon qu'on se trouve en présence d'une économie d'échange ou de production. Il est admis que la SB perd de sa pertinence pour vérifier l'unicité en présence de production. De plus, des exemples concrets ont justifié que la SB ne pouvait pas impliquer l'axiome faible car ce dernier n'est pas compatible avec la multiplicité des équilibres (Kehoe,[1985b]). Mais une faille est détectée et voit le jour avec les expériences de Monte Carlo. Elles montrent que les cas de violations de l'axiome faible pour des fonctions satisfaisant la SB sont extrêmement rares ; cependant ils existent malgré tout. En d'autres termes, l'ensemble des fonctions qui satisfont la SB contient un sous-ensemble, ouvert et non-vide de l'ensemble de toutes les fonctions de demande. Ces résultats soumettent une nouvelle direction dans les recherches menées sur l'unicité. Les méthodes de Monte Carlo ont fait émerger de nouvelles fonctions de demande avec de nouveaux exemples empiriques, ayant pour particularité de satisfaire la substituabilité brute tout en violant l'axiome faible. Ce n'était pas possible avant. Les résultats quantitatifs des expériences viennent toutefois calmer l'ardeur des nouveaux horizons qualitatifs. Les simulations par ordinateur affirment que de telles fonctions sont extrêmement rares.

L'unicité est une propriété véritablement importante et désirable pour un modèle économique seulement la faible quantité d'exemples témoignant d'une unicité laisse quelque peu perplexe quant à la pérennité de ces recherches. Kehoe invite à perpétuer son travail dans les années 1990 en argumentant que si la non-unicité peut être rare en pratique, ce qui a été démontré jusqu'à maintenant c'est avant tout le caractère beaucoup trop restrictif des hypothèses qui garantissent l'unicité.

En somme, que l'on s'appuie sur des conditions déclarées trop rigides, peu réalistes ou que l'on trouve une astuce, un moyen de lever le problème, la finalité est la même : la rareté fait loi.

3.3. ...POUR DES RÉSULTATS INTÉRESSANTS MAIS PEU NOMBREUX.

A cette impasse, aucune réponse satisfaisante n'a été proposée jusqu'à présent. En outre, ce qui retient notre attention, ce ne sont pas les ébauches de réponses et les nouveaux résultats mais les raisons qui ont conduit à cet arrêt dans la recherche de l'unicité. Nous nous sommes essentiellement concentrés sur le cas de Kehoe. Tout d'abord puisque c'est le premier économiste à traiter véritablement de la question de l'applicabilité de l'unicité de l'EG de façon profonde et rigoureuse. Comment se saisir d'un sujet sans en approcher le principal concepteur et acteur. Ensuite parce que nombres de ses papiers touchant la question de l'unicité ont été co-écrits, ce qui nous permet d'étendre implicitement l'étude à d'autres économistes.

Ainsi dans le quatrième et dernier chapitre, via Kehoe — acteur majeur dans l'appréhension du problème de l'applicabilité de l'unicité — et ses travaux associés, nous allons essayer de donner des éléments de réponses sur la trajectoire qu'a pris cette question. Est-elle inhérente à l'objet étudié ou résulte-t-elle plutôt des conceptions et des méthodes empruntées par les chercheurs ?

Chapitre 4

Kehoe : de la révolution à l'ambiguïté

Ce chapitre examine et approfondit l'idée que la voie sans issue dans laquelle s'est retrouvée l'unicité peut provenir de la position adoptée par les scientifiques. En axant notre étude sur Kehoe, nous tenterons, dans un premier temps, de démontrer que sa situation bancaire n'est ni désirable, ni saine, ni pérenne. Le changement de statut de l'unicité n'est en rien marginal. Il témoigne d'une véritable rupture d'avec la perception véhiculée par la théorie. Seulement comment allier nouveau statut et techniques mathématiques. De ce problème, il fait un choix, implicite puisque jamais revendiqué comme tel ouvertement, mais aussi explicite par la position scientifique adoptée : il rejoint et s'inscrit dans une approche à la Debreu. Cela fera l'objet de notre seconde section. Enfin, dans une dernière section nous nous poserons la question de l'avenir de l'unicité.

4.1 Economiste et mathématicien ou mathématicien-économiste ?

Le titre laisse entrevoir un simple jeu de mots. Il n'en est rien. Cette question revêt un caractère très important dans l'évolution des travaux abordant la dimension applicable de l'unicité.

4.1. ECONOMISTE ET MATHÉMATICIEN OU MATHÉMATICIEN-ÉCONOMISTE ?

Comme nous l'avons vu, Kehoe émet un ordre d'importance entre les hypothèses *nécessaires* et les hypothèses *suffisantes*. Il prouve que les hypothèses mathématiques, *suffisantes*, ne sont pas convenables puisqu'elles étaient trop restrictives. L'absence de contenu économique amène à une situation saugrenue. Il faut introduire des conditions à caractère sociologique, historique. Cela relèverait même du devoir des scientifiques de revenir à un ensemble d'hypothèses avant tout *nécessaires* — détenant un contenu économique clair. Ce projet très ambitieux s'inscrit néanmoins dans une démarche plus fantasmatique que réaliste. Ne s'appuyer que sur des hypothèses *nécessaires* implique que les mathématiques ont seulement une place de soutien. Par exemple, la condition introduisant la Jacobienne n'est plus valable tant qu'une interprétation économique satisfaisante de cette dernière n'est pas fournie. Même s'il apparaît comme tomber sous le sens d'adhérer à ce projet, c'est tout une nouvelle projection de la méthode scientifique qui se développe. A défaut de ne pas réussir à retranscrire mathématiquement des hypothèses réalistes trop complexes, tout un pan de l'économie vole en éclat et n'est plus. Aussi, la démarche de Kehoe, de part le changement de statut de l'unicité et l'ambition qu'il nourrit dans la construction d'un ensemble d'hypothèses *nécessaires* — qui provient directement d'une vision normative — ne peut être autrement qualifiée que de révolutionnaire.

En parallèle de cette perspective économique, son activité de mathématicien l'invite à développer un algorithme qui servira au calcul de l'équilibre général le cas échéant. Ces deux sphères se présentent comme distinctes voire disjointes. Il mène deux combats en parallèle. Le premier est incontestablement novateur quand le second apporte sa pierre à l'édifice de manière considérable mais ne rompt pas pour autant avec la tradition.

Cependant cette indépendance en surface est incohérente. En effet, comment la machine — l'algorithme — peut-elle vraiment se distinguer du projet, des conditions qui permettraient de le réaliser ? Une machine est souvent construite et pensée à l'image du projet suivi. Il n'est pas anodin de noter qu'après l'article [1985b], aucun autre papier rédigé par l'auteur ne fera référence à cette idée de rupture. Qu'il ne revendique pas explicitement cette nouvelle démarche se comprend très

bien si ces travaux s'y inscrivent indirectement. Toutefois c'est l'impression inverse que l'auteur laisse. Ces papiers futurs témoignent davantage d'un retour au confort de l'irréalisme qu'il avait critiqué et passablement défait hypothèse par hypothèse, pan par pan.

Sa position dès lors est ambiguë. Il propose toujours la même méthode efficace dans chacun de ses articles qui laisse à croire son attachement et son non-renoncement à son projet initial. Elle s'articule comme suit : Tout d'abord il généralise l'approche théorique, souvent mais pas systématiquement initiée par Debreu et développée par les remarques portant sur les travaux de ce dernier, ainsi que celle d'ordre technique, mathématique. Ensuite il fait part de son désaccord avec cette approche théorique en affirmant que la négligeabilité des cas pathologiques ne se vérifie pas empiriquement. C'est plutôt l'inverse qui se produit, avec davantage d'équilibre non-unique. Enfin après avoir démontré pourquoi l'unicité n'était pas si évidente, notamment en attaquant les hypothèses retenues, il s'échine à donner le cadre dans lequel l'unicité pourrait être vérifiée et quelle hypothèse faut-il émettre. La spécificité de cette hypothèse réside dans le fait qu'elle est toujours mathématiquement large, rigoureuse ainsi que facilement interprétable économiquement. Prenons un exemple pour mettre en perspective cette ambiguïté. Kehoe, Levine, Mas-Colell et Zame se sont intéressés à la *détermination* — situation dans laquelle les équilibres sont localement uniques — d'un équilibre en présence de « large squared economies ». Ce type d'économie a une double caractéristique : il y a une infinité d'agents et une infinité de marchandises. La méthode employée dans ce papier est la suivante. Ils s'appuient sur un cadre quelque peu différent de celui des générations imbriquées, correspondant à un espace de marchandises séparable, hilbertien de dimension infinie. On identifie là, l'étape de la généralisation. Le premier avantage se traduit par l'utilisation du calcul différentiel. Le second stipule qu'en présence d'un espace hilbertien, la valeur des dotations agrégées est nécessairement finie et ce quelque soit l'équilibre considéré. Par conséquent, chaque équilibre est Pareto-efficient. En revanche, le désavantage c'est que du fait d'avoir un espace très large, il est rendu possible de se retrouver avec des consommations et des prix négatifs. La dimension interprétative est alors bousculée.

4.1. ECONOMISTE ET MATHÉMATICIEN OU MATHÉMATICIEN-ÉCONOMISTE ?

De ce nouvel environnement, ils développent des résultats portant d'une part sur l'*indétermination* et d'autre part sur la *détermination*. Ils commencent par démontrer et fournir un analogue du théorème de Sonnenschein. Cela confirme la seconde étape de la méthode puisque rappelons que l'une des conséquences immédiates de ce théorème est que l'unicité de l'EG ne se réalise que dans certains cas, très spécifiques. Cela ne rejoint pas l'approche théorique de Debreu.

Ensuite les résultats de second type, établissent que si l'espace des consommateurs est de classe C^1 intégrable — i.e. les dérivées des demandes individuelles excédentaires forment une famille uniformément intégrable — alors l'unicité devrait être une propriété générique. Nommons cette propriété : (1). Pour arriver à ce résultat ils s'aident notamment des travaux de Muller et Woodford¹ (1986) et de celui de Kehoe, Levine et Romer²(1988). (1) est d'abord exposée dans le cadre d'une économie avec un nombre fini de consommateurs. En outre elle annonce que si l'espace des consommateurs est suffisamment petit alors l'unicité devrait être une propriété générique. C'est ici qu'intervient la troisième et dernière étape. En changeant de cadre — on passe d'une économie avec un nombre fini de consommateurs à un nombre infini — il introduit une nouvelle condition mathématique et facilement interprétable : des économies de classe C^1 intégrable. Économiquement, elle signifie que la variation des goûts parcourant les consommateurs n'est pas très élevée. En d'autres termes, les fonctions de demande représentées dans l'économie ne doivent pas être trop diversifiées. Le point clef de la démonstration réside dans le fait que les économies intégrables de classe C^1 se comportent quasiment comme celles en dimension finie ; elles sont qualitativement très proches des économies de dimensions finies.

Ainsi, les conclusions de l'article sont limpides et rejoignent ouvertement la rupture forte soumise dans l'article [1985b] puisqu'elles reprennent l'idée que la situation *pathologique*, soit la situation d'*indétermination* est assurément plus commune que l'unicité. Les auteurs n'ont fait qu'élargir cette proposition à une dimension infinie.

1. Muller, W.J. and M. Woodford, 1988, Determinacy of equilibrium in stationary economies with both finite and infinite lived consumers, *Journal of Economic Theory* 46, 255-290.

2. Kehoe, T.J., D.K. Levine and P.M. Romer, 1988, Determinacy of equilibria in dynamic models with finitely many consumers, *Journal of Economic Theory*, forthcoming.

De même pour le théorème de Sonnenschein. Enfin, même si cette situation est la plus répandue, la *détermination* est possible si l'on impose une exigence supplémentaire.

Sous cet angle rien n'apparaît ambigu. Cependant ses références à Debreu et la généralisation qu'il en fait nous conduit plus à croire à un prolongement que ferait l'un de ces fervents disciples qu'un critique assidu. Son activité d'économiste et de mathématicien semblent s'être confondues pour donner naissance à une activité de mathématicien-économiste. Ce tournant est essentiel selon nous puisqu'il dévoile le tassement de son projet *révolutionnaire* et le rattachement implicite à Debreu. Ce point est déterminant pour le problème de l'unicité et les réponses apportées. On effectuerait, d'une certaine manière, un retour en arrière.

4.2 Un disciple dissimulé de Debreu

A la question, la machine peut-elle être véritablement indépendante du projet, nous pouvons répondre par l'affirmative, mais uniquement pour un temps. Ensuite, on retombe manifestement dans certains travers, habilement camouflés. Notons que ce lien scientifique entre les deux auteurs n'est sûrement pas conscient. Kehoe ne précise jamais explicitement qu'il souhaite étendre ou défaire le travail de Debreu. C'est une question sans intérêt du reste. Cependant l'impasse dans laquelle se trouvent les réponses apportées au problème de l'applicabilité de l'unicité de l'EG provient, selon nous de ce lien implicite. Il projette Kehoe et une grande partie de la recherche scientifique, s'enquérant de la place de l'unicité dans le programme de recherche scientifique de la TEG et de son évolution, dans une situation sans issue que l'on avait déjà soulevée dans l'approche théorique. De plus, cette impasse n'est pas sans impact sur les politiques à mener. C'est pourquoi nous allons nous attarder sur ce lien, les défaillances qu'il génère et l'état dans lequel il laisse finalement l'unicité.

Comme nous l'avons souligné précédemment, Kehoe reprend le cadre défini par Debreu et le généralise. A l'analyse finie et statique, il offre une analyse infinie et dynamique. La dichotomie qui a été mise en exergue, entre le développement

4.2. UN DISCIPLE DISSIMULÉ DE DEBREU

de l'algorithme d'un côté et celui d'une pensée économique nouvelle de l'autre ne semble plus être présente. En effet, par la suite, les travaux écrits et co-écrits par Kehoe témoignent davantage d'un prolongement du contexte intellectuel initié par Debreu, de sa manière de pensée. L'algorithme s'érige désormais dans un projet intellectuel précis et ne s'en trouve pas indépendant. Pour ce faire il a recours à de nouveaux concepts qui ne font que prolonger et perpétuer les concepts de Debreu dans d'autres dimensions. Une économie *déterminée* est l'équivalent d'une *économie régulière* dans un cadre où le nombre de biens et de consommateurs sont infinis. Il reprend les hypothèses centrales chez Debreu comme la différentiabilité des fonctions de demande, qui joue un rôle fondamentale dans ses preuves [1970, 1976]. Dans l'article co-écrit avec Levine et Romer [1990], ils établissent que si l'économie est assez lisse — i.e. les consommateurs arrivent à s'organiser pour obtenir une consommation moyenne la plus haute possible sur toutes les périodes de leur vie — alors les équilibres sont localement uniques pour presque toutes les dotations initiales. Dans la démonstration associée, ils empruntent notamment la compacité, outil introduit par Debreu. Aux vues de la présentation qui a été faite de la compacité, de son usage, il est clair que ces auteurs héritent directement de ce dernier et s'en inspirent sans le contredire, bien au contraire.

S'inspirer d'un auteur ne prouve pas que l'on se rallie directement à son projet. Il est tout à fait recevable de s'imprégner entièrement de la doctrine, des méthodes et des résultats d'un auteur pour en contester la teneur *a posteriori*. Seulement quand un auteur présente des éléments comme vérifiés et communément admis, alors même que les sources revendiquées ne sont issues que de travaux d'économistes orthodoxes, dans la droite ligne du mathématicien-économiste français, et que les conclusions tirées diffèrent très peu des anciennes, il est difficile de ne pas conclure à une affiliation certaine entre l'auteur citant et le scientifique cité. Même si l'un de ses premiers articles [1985b] sur l'unicité attestent d'une profonde et perceptible rupture, proposant une refonte de la vision de l'unicité, quelques années plus tard [1989, 1990, 1991] un changement s'est malgré tout opéré. Les références au contenu de cet article et à son aspect novateur disparaissent de plus en plus pour laisser place aux références à Debreu et ses remarques (Dierker [1972], Va-

rian [1975]). Qu'est-ce que ce retournement peut signifier ? Nous avons relevé trois possibilités.

La première possibilité consisterait à dire qu'il s'est laissé convaincre par l'aspect esthétique et puissant de l'analyse de Debreu. Argument peu recevable au demeurant puisqu'il paraît évident que Kehoe est convaincu par sa démarche, ne serait-ce que la rigueur dont il fait preuve dans ses articles et que l'on retrouve chez Kehoe pour défendre son dessein premier. Cette possibilité est donc à exclure comme principale explication de ce retournement.

La seconde possibilité détaillerait l'idée que n'ayant pas encore trouvé de solutions assez générales et convenables, comme des nouvelles hypothèses comportementales, historiques ou autre, que soulève le problème de l'équilibre général, Kehoe se serait résigné. En d'autres termes, l'étude de l'applicabilité aurait rejoint le monde théorique en ce sens que même les algorithmes, par exemple, seraient des outils purement normatifs, servant des projets idéaux et non plus positifs, ayant pour devoir la description d'une réalité la plus complexe possible. L'ambition d'un nouvel ensemble d'hypothèses aurait-elle été démesurée ? serait-elle devenue une chimère ? Cette alternative, moins grossière que la première, aurait pu être envisageable or Kehoe développe souvent en fin d'article des pans qu'il reste à étudier et invite ouvertement à le faire pour perpétuer son travail. Il multiplie, pendant une dizaine d'années, des études de cas pratiques telle que la réforme fiscale de 1986 en Espagne (1986)³ ou encore telle que la politique énergétique au Mexique (1991)⁴ contredisant, en partie, une éventuelle résignation. Cette alternative est ainsi incorrecte.

La troisième et dernière possibilité s'attacherait à dire qu'il essaye de changer petit à petit l'ensemble d'hypothèses pour le remplacer entièrement le cas échéant. En somme, il aurait entamé un travail de fourmi, inévitable lorsque l'on s'attaque à ce genre de problématique. Ce point de vue est le plus probable lorsqu'il dédiait l'essentiel de ses recherches à l'unicité. Seulement depuis 1995 il a cessé toutes

3. European Economic Review, Papers and Proceedings, 32 (1988), 334–42, with Antonio Manresa, Pedro Javier Noyola, Clemente Polo, and Ferran Sancho.

4. European Economic Review, Papers and Proceedings, 32 (1988), 334–42, with Antonio Manresa, Pedro Javier Noyola, Clemente Polo, and Ferran Sancho.

4.3. QUID DE L'UNICITÉ ET DE LA TEG ?

recherches portant sur ce sujet. Tout du moins aucune publication ne portent sur l'unicité ou ses hypothèses. Qu'en est-il alors ?

Il semble avoir abandonné provisoirement, mis de côté ce projet, sans pour autant donner de quelconques signes de résignation ou de contre-indications par rapport à son entreprise initiale. De plus la relation qu'il entretient avec les travaux de Debreu et l'ambiguïté qui en résulte n'ont fait, selon nous, que renforcer ce recul progressif vis-à-vis du dessein original proposé.

Par conséquent, de son attachement certain mais pas total à Debreu nait une véritable ambiguïté venant quelque peu bouleverser sa capacité à préserver son ambition initiale. Ses recherches se multiplient mais l'invoquent et la nourrissent de moins en moins. Au mieux elles l'entretiennent. Puis avec cette révolution avortée et le retrait de Kehoe sur le sujet qu'advient-il de l'unicité ?

4.3 Quid de l'unicité et de la TEG ?

Après que Kehoe a vivement convié ses pairs à poursuivre son entreprise, deux types de travaux ont éclos. Des travaux empiriques précis, comme la politique fiscale d'un pays lors d'une année, s'appliquant à prouver l'unicité. Puis, des travaux plus génériques, détaillant différents cas tel que celui présenté par Demichelis et Polermachakis [2006] qui étudie le problème de l'unicité que rencontrent les sentiers d'équilibre dans les modèles à générations imbriquées, ou encore celui rédigé par Shannon [1999] dans lequel l'auteur fournit un cadre de travail établissant la détermination des équilibres dans des modèles de TEG, ayant pour caractéristiques une infinité de marchandises et un nombre fini de consommateurs et de producteurs. Le second article attise particulièrement notre curiosité puisque l'auteur se réfère directement à Debreu ainsi qu'à Kehoe. Il avance, par exemple, que le modèle Arrow-Debreu livre des prédictions aiguisées. L'impression que le cadre institué par Debreu reste toujours plus confortable que l'impulsion insufflée par Kehoe, semble se confirmer. En outre, même si les travaux des années 2000, traitant de l'unicité, revendiquent une filiation directe à Kehoe, il est très peu fréquent que l'article [1985b] ou une partie de son contenu soient cités, et ce de manière explicite

ou implicite. Le projet s'avère être délaissé.

Dès lors quel avenir pour l'unicité et la TEG ? si les propositions censées pour reformuler l'appréhension de la notion d'unicité ne sont pas préservées et prolongées, cela peut vouloir dire que la situation analytique officielle, habituelle, i.e. la conservation du même ensemble hypothétique, nourrit encore conséquemment la recherche scientifique. La TEG n'est pas une théorie prédictive. Son dessein n'est pas d'affirmer que l'équilibre général se réalisera par « jeu de forces spontanées » mais plutôt de mettre en avant une structure logique, concluant qu'il est *logiquement* possible de l'atteindre. Le recours aux mathématiques n'est pas aberrant au demeurant. Cependant, dès lors qu'on pénètre dans la sphère réelle et de la calculabilité, il ne s'agit plus de se demander si les modèles sont *logiquement* viables sinon quelles sont les forces qui rentrent en jeu pour déterminer l'équilibre général. On substitue la sphère mathématique à la sphère sociale. La difficile poursuite du projet de Kehoe provient peut-être du fait qu'il n'existe pas de pont entre les mathématiques et la réalité pour appliquer la théorie économique. Mark Blaug [1982] défend l'idée que l'équilibre général appliqué relève des jeux de forces sociales et non pas des forces spontanées comme aiment à le penser beaucoup d'économistes. Ses propos sont encore d'actualité lorsqu'il écrit : « il est impossible à ce jour de montrer qu'un équilibre final de l'économie tout entière est indépendant du sentier emprunté pour atteindre cet équilibre ou que, parmi tous les sentiers qu'il est possible de choisir, celui qui est effectivement adopté doit converger et convergera vers l'équilibre » (p.160). Les modèles théoriques de l'unicité exhibent une cohérence interne, une logique dans les démonstrations. Nous en appelons directement aux preuves de Debreu. Le passage aux modèles empiriques est plus complexe. S'il ne point plus comme insurmontable, grâce aux exemples développés par Kehoe et d'autres économistes, ce passage laisse de grandes incertitudes quant à la réussite d'une capture entière et correcte de la réalité sociale et économique. Le principal défaut des modèles empiriques réside dans le fait qu'ils s'appuient trop sur des hypothèses acceptables seulement théoriquement. Aussi, il y a une confusion subtile qui est entretenue entre les faits et la théorie alors qu'aucun pont n'a été correctement érigé pour la justifier. L'un des principaux concepteurs et défenseurs

4.3. QUID DE L'UNICITÉ ET DE LA TEG ?

de la TEG, F. Hahn alimente tout à fait cette méprise lorsqu'il stipule que la TEG « (...) n'a aucune prétention formelle ou explicitement causale : elle n'émet aucune affirmation, par exemple, selon laquelle une séquence déterminée d'états économiques aboutira à l'état d'équilibre. Cependant, elle est régie par une proposition causale très faible, qui est la suivante : aucune séquence plausible d'états économiques n'aboutira, si elle aboutit quelque part, à un état qui ne serait pas un équilibre... on verra qu'il ne s'agit pas là d'une proposition forte en ceci qu'aucune description d'un processus particulier n'est en jeu. Il est également clair que, dans la mesure où elle est faible, cette proposition peut être fausse »⁵ (1973⁶, p.7.). La subtilité de la confusion réside dans le terme « plausible ». Nous rejoignons en partie l'analyse de Mark Blaug lorsqu'il écrit que cet adjectif « suggère une référence aux conditions du monde réel alors que le modèle de l'EG semble dépourvu de toute passerelle qui permettrait de passer du monde de la théorie au monde des faits ». Néanmoins, l'histoire scientifique atténue et modère les propos de l'auteur puisqu'avec les travaux de Kehoe notamment, nous savons qu'une brèche a été ouverte. Elle permettrait de construire ladite passerelle. Ce qui est plus à déplorer, c'est avant tout l'inconstance de cette avancée. Le manque de travaux s'engouffrant dans cette voie est un constat somme toute accablant et dérangeant.

Aux vues du faible contenu empirique de l'unicité de l'équilibre général, la question que nous sommes à même de nous poser c'est pourquoi continuer à investir dans cette partie du programme de recherche scientifique qu'est celui de la TEG ? pourquoi dédier « des ressources intellectuelles à son élaboration et à son raffinement » (M.Blaug, p.160) ? deux réponses sont envisageables.

La réponse traditionnelle stipule que si l'on suit et respectent les conditions *nécessaires* et suffisantes et que ces dernières sont définies avec précision et minutie, alors cela nous mènerait à la réalisation effective du modèle de l'EG dans le monde réel et ce qu'importe la manière. Nous percevons de suite que cette vision standard n'est plus du tout appropriée. Les articles de Scarf d'une certaine façon, puis surtout ceux de Kehoe, que nous avons présenté avec soin, démontrent que mêmes

5. Traduction effectuée par Mark Blaug [1982]

6. 1973a, « On the Notion of Equilibrium in Economics. An Inaugural Lecture, Cambridge : Cambridge University Press

ces hypothèses ne suffisaient plus pour l'applicabilité du modèle.

Une seconde réponse, mise en avant essentiellement par Hahn et Arrow, consisterait à dire que la TEG, et par conséquent les travaux concernant l'unicité, sont utilisables et fortement appréciables afin d'écarter tout argument faux mais communément admis et utilisés de manière récurrente. Cette réponse décrit en quelque sorte la TEG comme une apagogie négative (i.e. raisonnement par l'absurde négative). Cet outil économique-mathématique permettrait donc d'éloigner définitivement les fausses implications et les faux arguments qu'il pourrait générer en adoptant la position suivante : en empruntant un certain point de vue on aboutit à des conclusions absurdes — contradictoires avec la vision initiale ou avec les principes sur lesquels elle repose — non désirables voire impossibles. Cette utilisation serait, selon Hahn, d'un « grand intérêt pratique » puisqu'elle permettrait de « réfuter toutes sortes de points de vues politiques mal fondés relatifs aux ressources non renouvelables, aux taux de changes flottants, et à l'aide extérieure » (Blaug, p.162).

Conclusion

Nous avons vu que le traitement dont l'unicité a été l'objet a connu plusieurs tournants très importants. Le premier grand tournant a lieu avec la naissance de l'économie mathématique moderne, soit la première vague d'axiomatisation que l'on doit notamment à l'émergence du Cercle de Vienne dans les années 1930, qui influence grandement Wald dans ses travaux. Si cette première approche de l'unicité, se jumelant à celle de l'existence, n'aboutit pas un résultat vraiment probant, le travail effectué par Wald est considérable. Il détermine les conditions permettant d'obtenir l'unicité et l'existence, même si elles témoignent d'un manque de réalisme incontestable. Les fondations sont rigoureuses et solides. Il offre donc un cadre de réflexion sans précédent. Le second tournant se réfère indirectement au premier. En effet lorsque Debreu constitue et expose sa vision de l'unicité, elle s'inscrit dans une vision opposée à celle de Wald, tant mathématiquement qu'économiquement. Il ne s'attarde pas sur les preuves de ce dernier les trouvant trop denses, difficiles d'accès. Il s'inspire davantage de von Neumann et de la rupture qu'il impose à partir de 1937 avec son article, dans lequel il avance une première axiomatisation de l'économie en usant de la topologie algébrique. Dès lors le projet de Debreu est simple : il veut séparer le contenu économique de la méthode mathématique. Pour ce faire il utilise l'axiomatique ensembliste instituée par les bourbakistes et l'applique aux travaux économiques. La relation entre ces deux sphères est claire : elles ne communiquent qu'après avoir d'un côté développé l'outil mathématique et de l'autre spécifié les hypothèses sur les objets représentant les concepts économiques que Debreu qualifie de primitifs [1986]. « L'interprétation économique des théorèmes ainsi obtenus est la dernière étape de l'analyse » (Debreu, [1986]). Cette nouvelle méthode permettrait donc de fournir un cadre théorique, conceptuel, le plus général et complet possible afin que n'importe quelle hypothèse puisse y être incluse, développée et appliquée. Les mathématiques ne fournissent pas tant une théorie qu'un simple instrument adaptable pour la formulation d'une théorie ; « le divorce de la forme et du fond rapporte immédiatement une nouvelle théorie quand on découvre une nouvelle interprétation d'un concept primitif » (*Idem*). Ce cadre serait donc indépendant d'une ambition économique ou d'un objet économique ; c'est ce qu'affirme Debreu lorsqu'il stipule que « si on enlève l'interprétation éco-

4.3. QUID DE L'UNICITÉ ET DE LA TEG ?

nomique des concepts primitifs, des suppositions et des conclusions du modèle, sa structure mathématique nue doit toujours être debout » (*Idem*). Cependant, le troisième tournant évoqué dans ce mémoire soulève quelques contradictions dans cette ambitieuse entreprise. En effet le changement du statut de l'unicité devrait pouvoir proposer une nouvelle théorie, comme l'écrit Debreu, sans avoir à désapprouver le cadre. Or la mathématique employée et surtout la méthode usitée — l'axiomatique — appelle à des hypothèses très formelles et par conséquent très restreintes. Cette méthode génère donc un ensemble d'hypothèses particulier et ne semble pas s'adapter aussi bien que Debreu le présente. Le cadre n'est pas si malléable et compartimenté que cela puisque dès lors que Kehoe l'emprunte, il s'éloigne de son dessein initial. Tout du moins c'est ce que nous avons voulu montrer.

Dès lors, afin de perpétuer l'étude de l'unicité et de la TEG, deux voies sont envisageables. La première consiste en l'acceptation de l'impossibilité de traduire les caractéristiques sociales en concepts mathématiques. On rejoint ici la pensée de Blaug et on accepte que la TEG ne serve qu'à écarter les fausses implications ainsi que les arguments fallacieux.

La seconde consiste à poursuivre l'effort de formalisation de certains comportements sociaux, avec plus ou moins de réussite.

Bibliographie

- [1] Cot A. and Lallement J. Une histoire des théories de l'équilibre général. *Economies et Société*, Tome XL, Dec. 2006.
- [2] Kirman A. The intrinsic limits of modern economic theory : The emperor has no clothes. *The Economic Journal*, 99 :126–139, *Conférence* 1989.
- [3] Wald A. Über die eindeutige positive lösbarkeit der neuen produktionsgleichungen (mitteilung i). *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Cahier 6(1933-1934) :12–18, 1935. Traduction anglaise : On the Unique Negative Solvability of the New Production System, part 1, in W.J. Baumol et S.M. Goldfeld, *Precursors in mathematical economics : an anthology* p.281-288.
- [4] Wald A. Über die produktionsgleichungen der ökonomischen wertlehre (parti). *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Cahier 7 (1934-1935) :1–16, 1936. Traduction anglaise : On the Production Equations of Economic Value Theory (Part 2) , in W.J. Baumol et S.M. Goldfeld, *Precursors in mathematical economics : an anthology* p.289-294.
- [5] Wald A. On some systems of equations of mathematical economics. *Econometrica*, Vol. 54 :368–403, Oct. 1951.
- [6] Zylderberg A. *Nouvelle histoire de la pensée économique*. La Découverte, 2000. Chapitre 32, *La TEG de 1918 à 1939*.
- [7] Guerrien B. *La Théorie Néo-classique, Bilan et perspectives du modèle d'équilibre général*. Economica, 1989.
- [8] Ingrao B. and Israel G. *The Invisible Hand*. MIT Press, 1987.
- [9] Shannon C. Determinacy of competitive equilibria in economies with many commodities. *Economic Theory*, 14 :29–87, Jul. 1999.

BIBLIOGRAPHIE

- [10] Debreu. Theoretic models : Mathematical form and economic content. *Econometrica*, Vol. 54 :1259–1270, Nov. 1986.
- [11] Dierker E. Two remarks on the number of equilibria of an economy. *Econometrica*, 40 :951–953, Sep. 1972.
- [12] Dierker E. and Dierker H. The local uniqueness of equilibria. *Econometrica*, 40 :867–881, Sep. 1972.
- [13] Weintraub E.R. On the existence of a competitive equilibrium : 1930-1954. *Journal of Economic Literature*, 21 :1–39, Mar. 1983.
- [14] Vatin F. *Economie politique et économie naturelle chez Antoine-Augustin Cournot*. PUF, 1998.
- [15] Debreu G. Economies with a finite set of equilibria. *Econometrica*, Vol. 38 :387–392, May 1970.
- [16] Debreu G. Regular differentiable economies. *The American Economic Review*, Vol. 66 :280–287, May 1976.
- [17] Debreu G. Economic theory in the mathematical mode. *The American Economic Review*, Vol. 74, Jun. 1984.
- [18] Debreu G. The mathematization of economic theory. *The American Economic Review*, 81 :1–7, Mar. 1991.
- [19] Debreu G. and Scarf H. A limit theorem on the core of an economy. *International Economic Review*, 4 :235–246, Sep. 1963.
- [20] Deleplace G. *Histoire de la pensée économique : du royaume agricole de Quesnay au monde à la Arrow-Debreu*. Dunod, 2009.
- [21] Israel G. *La mathématisation du réel : essai sur la modélisation mathématique*. Ed. du Seuil, 1996.
- [22] Scarf H. Some examples of global instability of the competitive equilibrium. *International Economic Review*, 1 :157–172, Sept. 1960.
- [23] Scarf H. *The Computation of Economic Equilibria*. Yale University Press, 1973.

- [24] Scarf H. and Shoven J.B. *Applied General Equilibrium analysis*. Cambridge University Press, 1984.
- [25] Varian H.R. A third remark on the number of equilibria of an economy. *Econometrica*, 43 :985–986, Sept-Nov. 1975.
- [26] Arrow j.K. and Hahn F.H. *General Competitive Analysis*. Amsterdam : North-Holland, 1971. Chapitre 8.
- [27] Nishimura K. A further remark on the number of equilibria of an economy. *International Economic Review*, 19 :679–685, Oct. 1978.
- [28] Schlesinger K. Über die productionsgleichungen der ökonomischen wertlehre (parti). *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, pages 10–11, 1935. Traduction anglaise : On the Production Equations of Economic Value Theory , in W.J. Baumol et S.M. Goldfeld, *Precursors in mathematical economics : an anthology* p.289-294.
- [29] Levine D.K. Kehoe T.J. and Romer P.M. Determinacy of equilibria in dynamic models with finitely many consumers. *Journal of Economic Theory*, 50, Feb. 1990.
- [30] Mas-Colell A. Kehoe T.J., Levine D.K. and Woodford M. Gross substitutability in large-square economies. *Journal of Economic Theory*, 54, Jun. 1991.
- [31] Mas-Colell A. Kehoe T.J., Levine D.K. and Zame W.R. Determinacy of equilibrium in large-square economies. *Journal of Mathematical Economics*, 18 :231–262, 1989.
- [32] Blaug M. *La Méthodologie Economique*. Economica, 1982.
- [33] Le Gall P. La première démonstration d’existence d’un équilibre général par abraham wald. *Economies et Sociétés, série (Economia)*, PE n°15 :117–137, 1991.
- [34] Mongin P. L’axiomatisation et les théories économiques. *Revue Economique*, 54 :99–138, 2003.
- [35] Pierce and Wise. On the uniqueness of competitive equilibrium : Part i unbounded demand. *Econometrica*, 41 :921–932, Sept. 1973.

BIBLIOGRAPHIE

- [36] Blanché R. *L'axiomatique*. PUF, 1955.
- [37] Cornwall R. *Introduction to the use of General Equilibrium Analysis*. Amsterdam : North-Holland, 1984.
- [38] Demichelis S. and Polemarchakis H.M. The determinacy of equilibrium in economies of overlapping generations. *Economic Theory*, 40 :461–475, Sep. 2007.
- [39] Kehoe T.J. Multiplicity of equilibria and comparative statics. *The Quarterly Journal of Economics*, 100 :119–147, Feb. 1985.
- [40] Kehoe T.J. Gross substitutability and the weak axiom of revealed preference. *Journal of Mathematical Economics*, 21 :37–50, 1992.
- [41] Kehoe T.J. and Prescott E.C. Introduction to the symposium : The discipline of applied general equilibrium. *Economic Theory*, 6 :1–11, 1995.
- [42] Kehoe T.J. and Whalley J. Uniqueness of equilibrium in large-square numerical general equilibrium models. *Journal of Public Economics*, 28 :247–254, 1985.
- [43] Kehoe T.J. and D.K. Levine. Comparative statics and perfect foresight in infinite horizon economies. *Econometrica*, 53 :433–453, Mar. 1985.
- [44] von Neumann J. A model of general economic equilibrium. *The Review of Economic Studies*, Vol. XIII (1) :1–9, 1945-46. Traduction anglaise effectuée par G. Morton. Original in *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Cahier 8 (1935-1936), 1937.
- [45] Hildebrand W. On the uniqueness of mean demand for dispersed families of preferences. *Econometrica*, 48 :1703–1710, Nov. 1980.
- [46] Balasko Y. Economic equilibrium and catastrophe theory : An introduction. *Econometrica*, 46 :557–569, May. 1978.
- [47] Balasko Y. and Tvede M. General equilibrium without utility functions : how far to go ? *Economic Theory*, 45 :201–225, Oct. 2010.